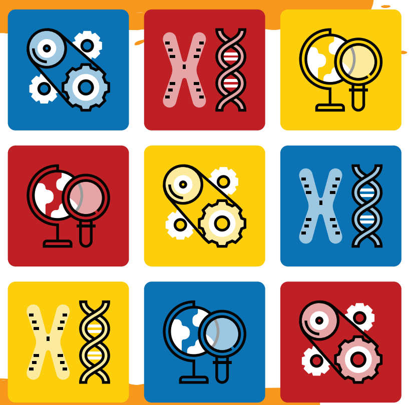
Eulers boekenkast

UITDAGING

Kies vier kleuren en vier symbolen.
Kun je met die stukjes een 4×4-rooster maken, op zo'n manier dat eenzelfde rij of kolom nooit twee keer hetzelfde kleur of symbool bevat?

Deze figuur geeft een voorbeeld met drie kleuren en drie symbolen, gelegd volgens dezelfde spelregels.



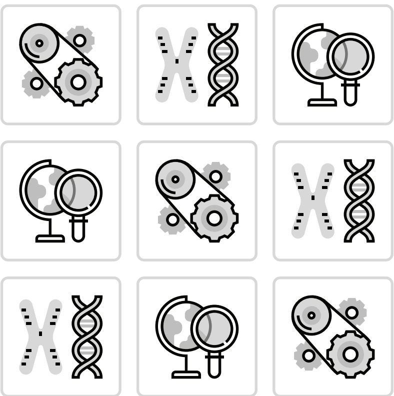
Gelukt? Probeer het eens met vijf, zes … kleuren en symbolen!

De tabel hieronder geeft een subjectieve moeilijkheidsgraad.

4	5	6	7	8	9	10
★	★★	☆☆☆☆☆	★★	★★★	★★	★★★★★

Latijnse vierkanten

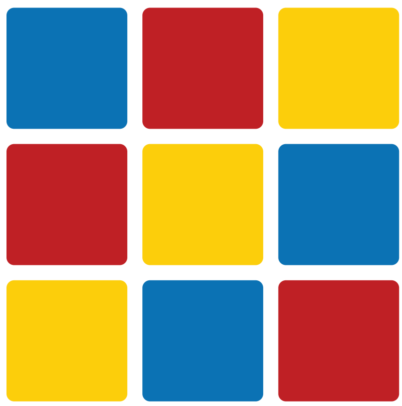
De opgave van de puzzel doet je misschien een beetje denken aan een sudoku, waar je evenmin dubbele cijfers in een rij of kolom mag invullen. Of misschien herinner je je *magische vierkanten*: roosters van getallen die in elke rij en kolom optellen tot dezelfde som. In elk geval, een vierkant rooster van $n \times n$, gevuld met n symbolen die elk exact één keer voorkomen in elke rij en kolom, wordt een *Latijns vierkant* genoemd.



Je ziet hier een aantal voorbeelden. Het vierkant links bevat drie symbolen, die inderdaad voldoen aan de spelregels. En hieronder zie je een Latijns vierkant opgebouwd uit kleuren.

De eerste wiskundige studie van Latijnse vierkanten wordt vaak toegeschreven aan de beroemde wiskundige Leonhard Euler, al was de Koreaan Choi Seok-jeong eigenlijk 67 jaar eerder. Beiden bestudeerden ze Latijnse vierkanten om er magische vierkanten mee te construeren. De naam verwijst trouwens naar het ons alombekende Latijns alfabet, omdat Euler als symbolen graag de letters A, B, C ... gebruikte.

Latijnse vierkanten staan centraal in een aantal denkpuzzels als sudoku en bordspellen als Kamisado. Intussen kennen ze echter ook heel wat serieuzere toepassingen, bijvoorbeeld in foutdetecterende codes of in het opstellen van statistische proeven. Gelukkig zijn er Latijnse vierkanten bij de vleet en kent men efficiënte methoden om er te genereren.



Als je in een leeg rooster zowel de eerste rij als kolom invult op een manier naar keuze, dan kun je die altijd vervolledigen naar een compleet Latijns vierkant. Voor een 2×2 en 3×3 is er maar één manier, voor een 4×4 heb je al wat keuze, en bij grotere vierkanten exploderen de mogelijkheden zowat!

2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	4	56	9408	16942080	535281401856	377597570964258816

Grieks-Latijnse vierkanten

Als Latijnse vierkanten toch zo makkelijk te construeren zijn, waarin schuilt dan de moeilijkheid? Het wordt al een pak pittiger als je een aantal vakjes vooraf ingevuld krijgt en daarnaast rekening moet houden met extra condities: dat is precies de uitdaging van sudoku!

Wat onze kleurrijke puzzel lastiger maakt, is dat je in feite twee Latijnse vierkanten tegelijk moet opstellen, eentje met kleuren en eentje met symbolen … en die moeten onderling “compatibel” zijn, aangezien iedere combinatie van kleur en symbool slechts één keer voorkomt! Ook Euler bestudeerde zulke dubbellaagse vierkanten. In plaats van met kleuren en symbolen noteerde hij de ene in het Latijns alfabet en de andere in het Grieks. Vandaar komt de vroegere benaming, Grieks-Latijnse vierkanten, al worden die vandaag eerder *orthogonaal* (loodrecht) genoemd.

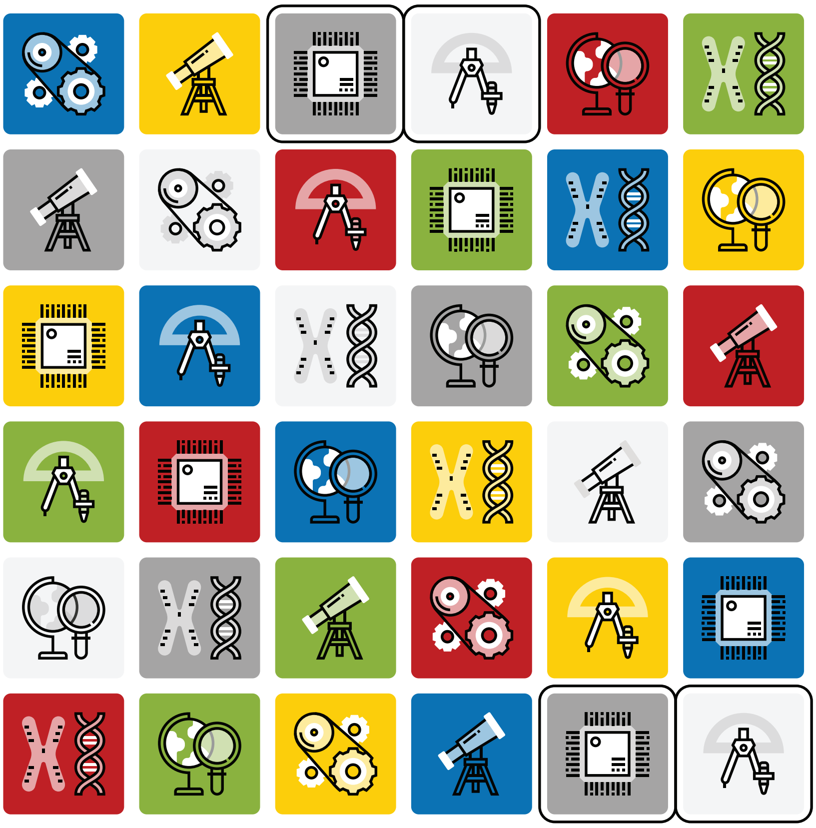
Aα	Bγ	Cβ
Cγ	Aβ	Bα
Bβ	Cα	Aγ

Euler vond constructies voor Grieks-Latijnse vierkanten van alle mogelijke oneven groottes en alle veelvouden van vier. De enige lastige groottes bleken dus nog 2, 6, 10, 14, 18 … Op een 2×2-bord heb je snel door dat het niet zal lukken, maar op een 6×6 is dat toch heel wat minder evident!

De figuur hiernaast komt dicht in de buurt … maar bevat helaas twee combinaties dubbel.

Na heel veel pogingen die nét niet uitkwamen beweerde Euler dat de opgave, net zoals de 2×2, domweg onmogelijk is.

Een goede eeuw later kreeg Euler gelijk: Gaston Tarry bewees in 1901 dat 6×6 inderdaad onoplosbaar is, door essentieel alle mogelijkheden zorgvuldig af te gaan.



Euler spoilers

Omdat hij geen algemene methode vond om Grieks-Latijnse vierkanten van grootte 2, 6, 10 ... te construeren, en omdat 2 duidelijk niet lukt en 6 blijkbaar ook niet, vermoedde Euler dat heel die familie gedoemd was. Hier sloeg hij de bal wél mis. Ray Bose en Sharadchandra Shrikhande konden een geldige 22×22 bouwen met wiskundige inzichten in 1959, en in datzelfde jaar vond Ernest Parker met een computerzoektocht een 10×10-vierkant. Het was een van de allereerste combinatorische problemen gekraakt door een computer.

Zelfs grote wiskundigen vergissen zich wel eens!

Meer weten?

Verbaasd door de onoplosbaarheid van 6×6 Grieks-Latijnse vierkanten? Je kan er heel wat over terugvinden onder de naam "Eulers 36-officierenprobleem". Hij stelde de opgave namelijk voor aan de hand van 36 officieren in zes rangen en zes regimenten. Enkele toegankelijke bronnen:

- Numberphile, *Euler squares*.
- Ian Stewart, *Euler's revolution.*
  New Scientist, vol. 193, no. 2596, 2007, p. 48–51.

Zoals opgemerkt kennen Latijnse vierkanten en Grieks-Latijnse vierkanten allerlei toepassingen in statistische onderzoeksplanning. Een van de toonaangevende werken legt uit hoe.

- Ronald Fisher, *The design of experiments*.
  Hafner Press, ed. 8, 1971.

Wil je de originele verhandeling van Euler eens doorgronden?

- Leonhard Euler, *Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés magiques.*
  Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen, vol. 9, 1782, p. 85–239.
  Leonhardi Euleri Opera Omnia I, vol. 7, p. 291–392.

Of het originele tegenvoorbeeld van Bose en Shrikhande?

- Ray Bose, Sharadchandra Shrikahnde, *On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order* $4t + 2$.
  Proceedings of the National Academy of Science, vol. 45, no. 5, 1959, p. 734–737.

Mag het wat moderner? Recent kwam er een herformulering van het 36-officierenprobleem in kwantummechanische termen. Een team fysici ontdekte dat kwantumverstrengeling het probleem wél oplosbaar maakt, met een concrete constructie van een rooster kwantumtoestanden (waar ook de gulden snede in blijkt op te duiken).

- Quanta Magazine, *Euler's 243-year-old 'impossible' puzzle gets a quantum solution*.
- Suhail Rather, Adam Burchardt, Wojciech Bruzda, Grzegorz Rajchel-Mieldzioć, Arul Lakshminarayan, Karol Życzkowski, *Thirty-six entangled officers of Euler: quantum solution to a classically impossible problem.*
  Physical Review Letters, vol. 128, no. 8, 2022.