Torens van Hanoi

UITDAGING 1

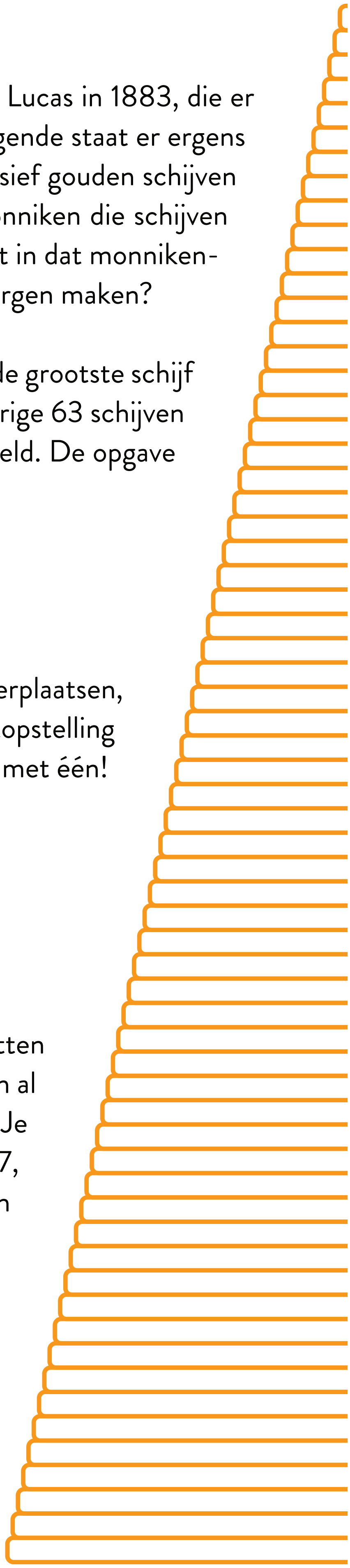
Kun jij een toren van drie schijven verplaatsen naar een andere staaf, één schijf per keer en zonder een schijf bovenop een kleinere te leggen?
Lukt het ook met vier schijven, en vijf?

UITDAGING 2

Neem er een vierde staaf bij.
In hoeveel zetten kun jij alle negen schijven reglementair overbrengen?

De torens van Hanoi

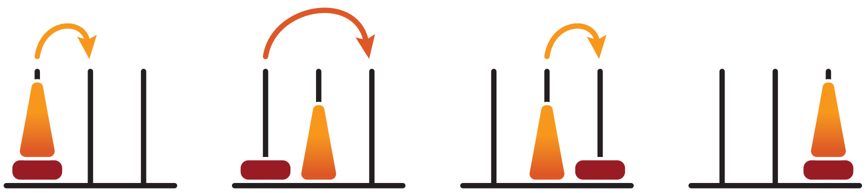
De puzzel werd uitgevonden door de Franse wiskundige Édouard Lucas in 1883, die er ook een uitgebreid achtergrondverhaal bij verzon. Volgens zijn legende staat er ergens in een Indische tempel de heilige toren van Brahma, met 64 massief gouden schijven op drie diamanten pijlers. Sinds mensenheugenis verplaatsen monniken die schijven naar een andere pijler (volgens dezelfde spelregels). De laatste zet in dat monnikenwerk zou het einde van de wereld betekenen ... Moeten we ons zorgen maken?



Om de puzzel met 64 schijven op te lossen, moet ooit onderweg de grootste schijf worden verplaatst naar een andere pijler. Dat kan enkel als de overige 63 schijven uit de weg staan, dus in één grote toren op de derde pijler gestapeld. De opgave valt uiteen in drie stappen:

- » verplaats 63 van de 64 schijven naar de hulppositie;
- » verplaats de grootste schijf naar de finale positie;
- » verplaats de 63 schijven weer bovenop de grootste.

Voor die 63 schijven kunnen we analoog te werk gaan: eerst 62 verplaatsen, dan die ene grootste, en dan weer 62. Elke extra schijf in de startopstelling doet het aantal nodige zetten verdubbelen en dan nog toenemen met één!

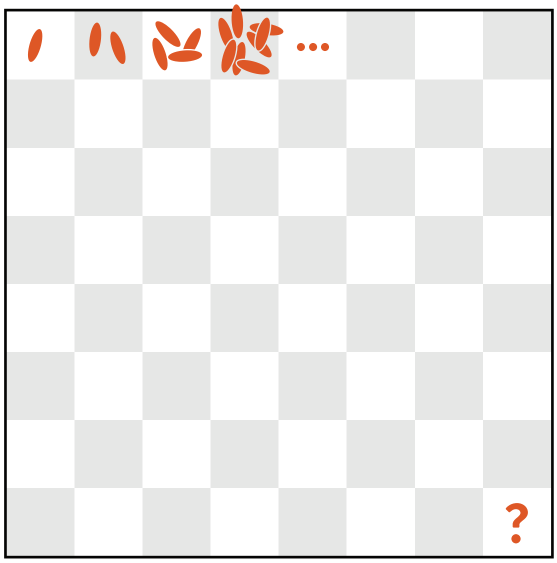


Eén schijf verplaatsen is kinderspel. Twee schijven vragen dan 3 zetten en een derde schijf lukt in 3+1+3 = 7 zetten. Vier schijven vereisen al 7+1+7 = 15 zetten, en dat worden er 15+1+15 = 31 voor een vijfde. Je ziet het aantal snel toenemen! In de getallen 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, ... doorzie je misschien het patroon: het zijn bijna de machten van twee, maar dan verminderd met één.

De 64ste term in die rij bedraagt maar liefst *18 triljoen*, of om precies te zijn *18 446 744 073 709 551 615*. Als de monniken elke seconde één van de 64 schijven kunnen verplaatsen, dan kost het nog meer dan 40 keer de leeftijd van het universum om de volledige toren reglementair te voltooien! We kunnen dus nog even op beide oren slapen.

Sissa en het schaakbord

Een gerelateerde legende met Indische referenties beweert dat Sissa, de uitvinder van het schaakspel (of althans de Indische voorloper *chaturanga*), een gunst mocht vragen van de koning. Op het eerste vakje van het schaakbord vroeg Sissa één rijstkorrel, op het vakje ernaast twee, dan vier, acht ... tot heel het bord met 64 vakjes vol lag. De koning vond dat een heel nederig verzoek, tot zijn penningmeesters het totale aantal rijstkorrels berekenden: datzelfde kolossale getal 18 446 744 073 709 551 615!



De torens van Hanoi oplossen met recursie

Er bestaan tal van trucjes die oplossingen van de puzzel geven, maar nogal uit de lucht komen vallen. Conceptueel kun je gebruik maken van het inzicht dat je voor zegge 10 schijven, eerst 9 schijven aan de kant moet krijgen, dan die laatste verplaatsen en tot slot de eerste 9 op hun plek leggen. Maar om die 9 schijven aan de kant te krijgen, kun je precies datzelfde patroon volgen. Dat geeft aanleiding tot een recursieve methode: in iedere stap kun je het probleem herleiden naar het oplossen van een kleinere toren of het verplaatsen van een enkele schijf. Voor mensen is die manier nogal ondoorzichtig, maar voor computers is dat een fluitje van een cent.

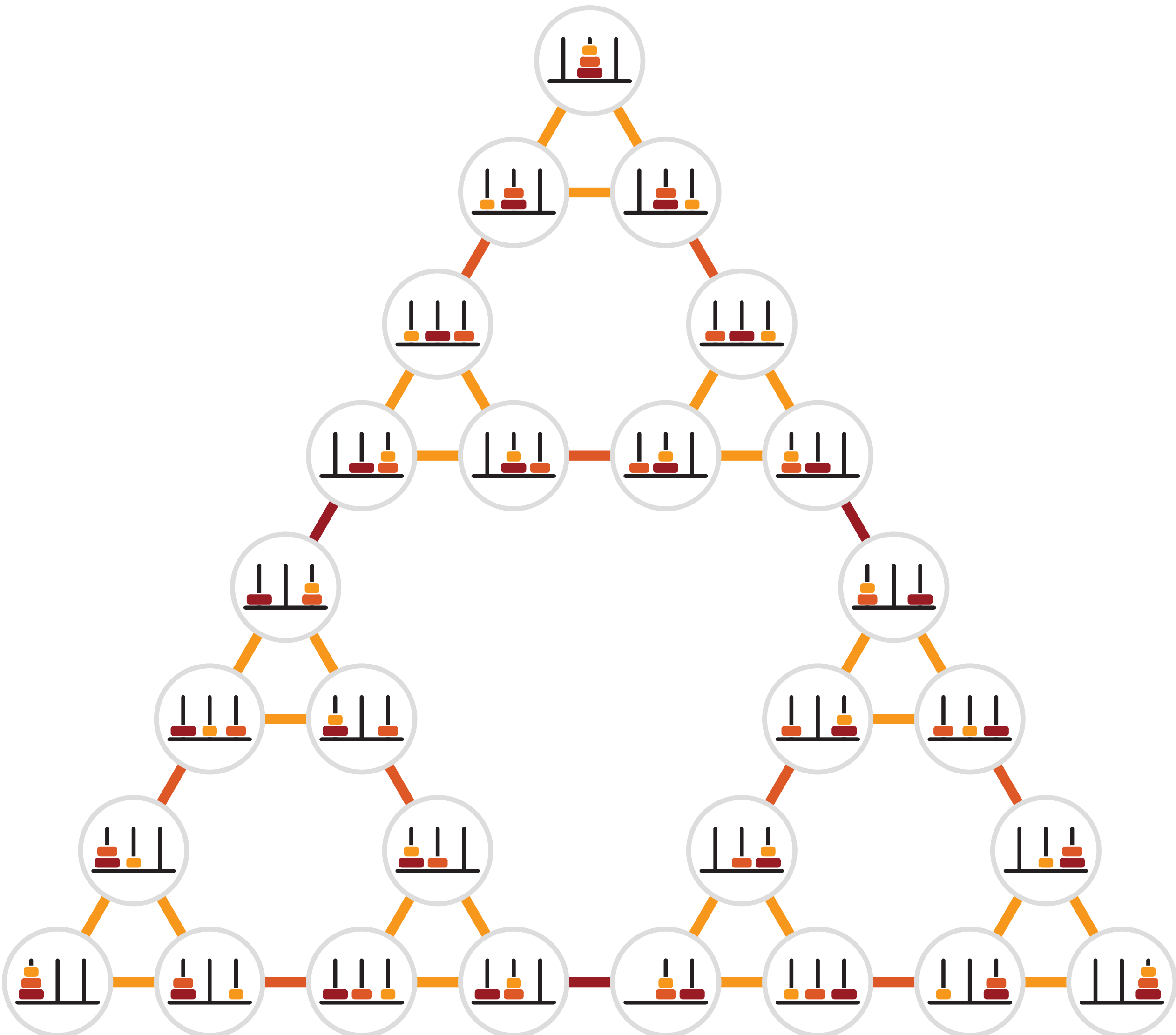
```
TORENS_VAN_HANOI.EXE
input:
      aantal schijven n
      startpijler A, hulppijler B, doelpijler C

algoritme SOLVE_HANOI(n, A,B,C):
      ALS n = 1 DAN:
            verplaats schijf 1 van A naar C;
      ALS n > 1 DAN:
            voer uit SOLVE_HANOI(n-1, A,C,B);
            verplaats schijf n van A naar C;
            voer uit SOLVE_HANOI(n-1, B,A,C);
```

De torens van Hanoi oplossen met fractalen

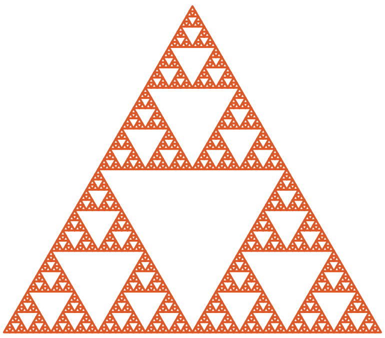
Voor computers mag het nog zo simpel zijn om bij te houden op welke diepte het algoritme bezig is, voor gewone stervelingen is dat toch heel wat lastiger. Gelukkig bestaan er ook andere manieren om de torens van Hanoi te kraken. Zo is er een oplossingsmethode die steunt op de binaire schrijfwijze van getallen … maar ook die is nog een beetje rekenintensief. Er is echter ook een methode waarmee je de puzzel zowat “op automatische piloot” kunt oplossen, via … fractalen!

Mathologer, *The ultimate tower of Hanoi algorithm*

Voor animaties van deze oplossingen (en referenties naar Doctor Who) is deze video een absolute aanrader! Ook de varianten met meerdere pijlers of andere start- en eindconfiguraties worden uitgebreid besproken.



De figuur op de vorige bladzijde vind je door alle 27 mogelijke configuraties van drie schijven op drie pijlers uit te tekenen, en die te verbinden als je die met één zet kan overbruggen. Je hebt altijd drie mogelijke zetten: het kleinste schijfje verplaatsen naar een van de twee andere pijlers, of de unieke mogelijke zet tussen die twee pijlers. De figuur wordt dus een netwerk met op elk punt drie “vertakkingen”. En op die figuur kun je makkelijk aflezen hoe je de puzzel oplost: volg het kortste pad vanuit de startconfiguratie (linksonder) naar de eindconfiguratie (rechtsonder). Dat kortste pad gaat gewoon rechtdoor, over zeven zetten.



Als je dezelfde figuur opstelt met meerdere schijven, dan blijkt die een gelijkaardige driehoekige vorm aan te nemen, maar dan met steeds meer details. Heb je al van fractalen gehoord? Dan herken je ongetwijfeld de beroemde driehoek van Sierpiński! Die verkrijg je door een driehoek op te delen in vier kleinere, de middenste weg te nemen, en datzelfde proces steeds opnieuw te herhalen op de drie resterende driehoeken.

Door te redeneren op die fractale figuur kun je een verrassend simpele procedure opstellen om de puzzel op te lossen. Dat kortste pad bestaat afwisselend uit zetten mét de kleinste schijf en zetten zonder. Als je een zet moet doen zonder kleinste schijf, dan is er maar één mogelijkheid. Met de kleinste schijf zijn er twee mogelijkheden (de twee andere pijlers). Het kortste pad vind je door met die kleinste telkens *in een vaste richting* naar de volgende pijler te springen!

Een heel eenvoudige stragie dus:
- » verplaats de kleinste schijf van pijler 1 naar pijler 2;
- » doe de unieke zet zonder de kleine;
- » verplaats de kleinste schijf van pijler 2 naar pijler 3;
- » doe de unieke zet zonder de kleine;
- » verplaats de kleinste schijf van pijler 3 naar pijler 1;
- » doe de unieke zet zonder de kleine;
- » verplaats de kleinste schijf van pijler 1 naar pijler 2;
- » ...

De pijler waar je uiteindelijk terechtkomt, hangt af van die richting waarin je het kleine schijfje verplaatst. Wat als je de hele toren van de linker- naar de rechterpijler wil brengen, en niet naar de middenste? Als het totale aantal schijven even is, dan moet je constant van links naar rechts gaan; bij een oneven aantal schijven, van rechts naar links.

Probeer maar eens!

De torens van Hanoi op meerdere pijlers

Het spreekt voor zich dat je met meerdere pijlers meer flexibiliteit ter beschikking hebt en dus vlotter tot de oplossing kunt geraken. Maar hoe vlot precies? Da's meteen een heel stuk lastiger om te analyseren. Met vier pijlers staat de opgave ook wel gekend als de puzzel van Reve.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161	193

Je kan de vierde pijler uitbuiten door (net zoals bij drie pijlers) recursief een deel van de toren te transporteren naar een andere pijler, daarna de rest van de torens te verplaatsen langs de drie nog beschikbare pijlers, en daarna terug met de volle vier pijlers dat eerste deel juist te zetten. Het vergt een beetje rekenwerk om uit te vissen hoe groot dat eerste gedeelte juist moet zijn, maar in ieder geval vind je zo de aantallen zetten in de tabel.

Voor tien schijven bijvoorbeeld kun je eerst de bovenste zes verplaatsen met de volle flexibiliteit van de vier pijlers (in 17 zetten), daarna de overgebleven vier via drie pijlers (in 15 zetten), en tot slot die zes langs vier pijlers (in 17 zetten), voor een totaal van 49 zetten — een heel stuk minder dan 1023 nodige zetten, wanneer je slechts drie pijlers ter beschikking krijgt! Je kan ook nagaan dat andere opdelingen van de oorspronkelijke toren wat meer zetten zouden vereisen.

Voor vier pijlers is deze methode het snelst. Da's niet echt evident: pas in 2015 toonde Thierry Bousch aan dat die getallen de efficiëntste oplossingen voorstellen.

Hoe zit het dan met vijf pijlers? Je kan eigenlijk dezelfde techniek toepassen: splits de toren op in drie gedeeltes, zet het bovenste deel uit de weg met de volle vijf pijlers, daarna het middenste deel met de beschikbare vier pijlers, zet daarna het laatste deel juist met drie pijlers, daarna het middenste met vier pijlers, en tot slot het originele bovenste deel met vijf pijlers. Opnieuw kost het wat uitproberen om de optimale opdeling te vinden, maar al bij al is dat een straightforward berekening.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87

Hetzelfde procédé werkt in feite voor gelijk hoeveel pijlers, en wordt het algoritme van Frame–Stewart genoemd. Het lijkt evident dat dat de slimste manier van puzzelen is. Of niet? Tot op vandaag is dat eigenlijk nog een openstaand probleem — de voorgestelde "bewijzen" van James Frame en Bonnie Stewart bevatten logische gaten die tot op heden nog niet gedicht zijn!

Meer weten?

De torens van Hanoi zijn een zodanig beroemde puzzel dat er heel wat video's en artikels over te vinden zijn. Zo zijn er op YouTube een aantal aanraders.

- Numberphile, *Key to the tower of Hanoi.*
- Mathologer, *The ultimate tower of Hanoi algorithm.*

Liever wat meer leesvoer? Dit recent boek met meer dan 400 pagina's is volledig gewijd aan de geschiedenis van en de wiskunde achter de puzzel.

- Andreas Hinz, Sandi Klavzar, Ciril Petr, *The tower of Hanoi: myths and maths.* Birkhäuser, 2018.

Wil je nog meer varianten op de puzzel? Paul Stockmeyer analyseerde een versie met volgende spelregels: je mag ofwel de kleinste schijf verplaatsen, ofwel twee schijven van opeenvolgende grootte van plaats wisselen op voorwaarde dat die allebei bovenop hun stapel liggen. Helemaal geen evidente opgave!

- Paul Stockmeyer, *Exchanging disks in the tower of Hanoi.* International Journal of Computer Mathematics, vol. 59, 1995, p. 37–47.

Wil je de voorgestelde oplossingen van Frame en Stewart lezen (ook al zijn die niet sluitend) of meer lezen over die methode?

- Bonnie Stewart & James Frame, *Solution to advanced problem 3819.* American Mathematical Monthly, vol. 48, no. 3, 1941, p. 216–219.
- Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, Ciril Petr, *On the Frame–Stewart algorithm for the multi-peg tower of Hanoi problem*. Discrete Applied Mathematics, vol. 120, no. 1–3, 2002, p. 141–157.

Voor vier pijlers is de efficiëntie wél bewezen. Het bewijs vind je hier.

- Thierry Bousch, *La quatrième tour de Hanoï.* Bulletin of The Belgian Mathematical Society – Simon Stevin, vol. 21, 2014, p. 895–912.

Als je zelf denkt een snellere oplossing te hebben gevonden voor vijf of meer pijlers, dan kun je die altijd vergelijken met de getallen in de On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

- OEIS, A007664.
- OEIS, A007665.