Valt het kwartje?

UITDAGING 1

Kun jij het schilderij ophangen aan <u>twee</u> spijkers ...
op zo'n manier dat het schilderij valt zodra je
één van die twee spijkers uit de muur haalt?

UITDAGING 2

Gelukt? Probeer eens met <u>drie</u> spijkers!
En slaag je er ook in met <u>vier</u> spijkers?

UITDAGING 3

Kun je het schilderij ophangen aan <u>één rode</u>
en <u>twee blauwe</u> spijkers, zodat het valt
zodra je de rode of de beide blauwe weghaalt,
maar blijft hangen zolang er nog rood én blauw is?

UITDAGING 4

En wat met <u>twee rode</u> en <u>twee blauwe</u> spijkers?

Als Uitdaging 1 op het eerste zicht nogal magisch lijkt, bekijk dan ter inspiratie eens de configuratie hiernaast. Daar gaat het koord rond de linkse spijker, dan rond de rechtse, en tot slot opnieuw rond de linkse maar dan in tegengestelde richting. Het is in essentie de rechterspijker die alles omhooghoudt: als je die ene uittrekt, dan valt het schilderij op de grond. De linkerspijker uittrekken heeft echter weinig effect.

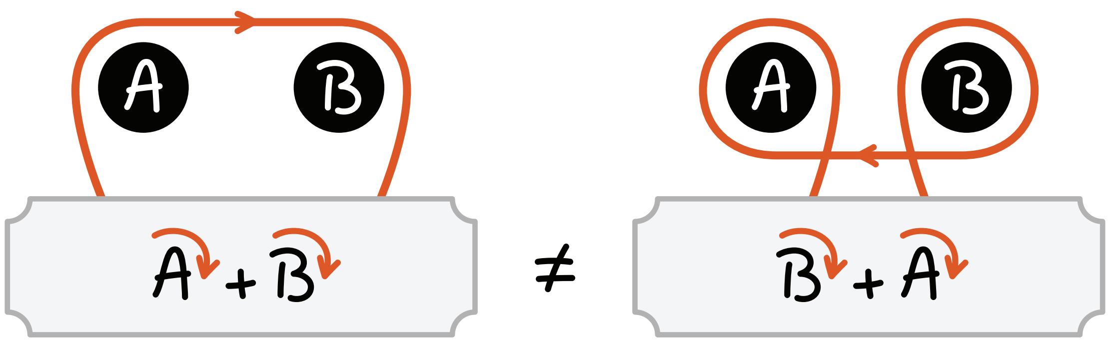
Matt Parker en Steve Mould demonstreren hun oplossingsmethode voor de opgave met twee spijkers. Zeker het bekijken waard!

Rekenen met lussen

Om de puzzels handiger systematisch aan te pakken, gebruiken we een algebraïsche notatie die ons in staat zal stellen om te "rekenen" met lussen. Geen paniek, je hoeft geen rekenwonder te zijn! We stellen eerst alle spijkers voor met letters. Het touw dat het schilderij omhoog houdt, kronkelt een aantal keer rondom de spijkers; we noteren met een pijl op de letter of een kronkel in wijzerzin dan wel in tegenwijzerzin gebeurt. Door die symbolen dan in volgorde "op te tellen" kunnen we het pad van het touw beschrijven. Zo wordt de configuratie hierboven bijvoorbeeld

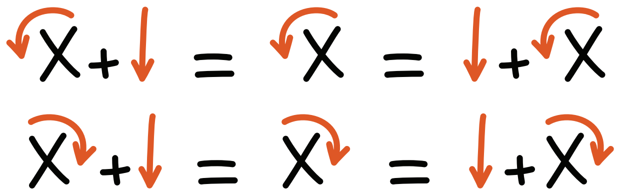
$$\overset{\curvearrowright}{A} + \overset{\curvearrowright}{B} + \overset{\curvearrowleft}{A}$$

in die notatie. Let op: de volgorde in zo'n som van lussen is erg belangrijk! Als je precies dezelfde omwentelingen van het touw in een andere volgorde doorloopt, dan is de configuratie anders.



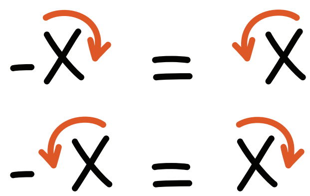
Uiteindelijk willen we naar lussen toe werken die niet langer gedragen worden door de spijkers en het schilderij doen vallen. Ook daarvoor hebben we een symbool nodig, bijvoorbeeld een pijl naar omlaag. Dat symbool stelt een lus voor die helemaal niet rondom de spijkers kronkelt.

Omdat zo'n lus geen effect heeft op wat er rond eender welke spijker gebeurt, gedraagt de pijl naar beneden zich net zoals het getal nul.



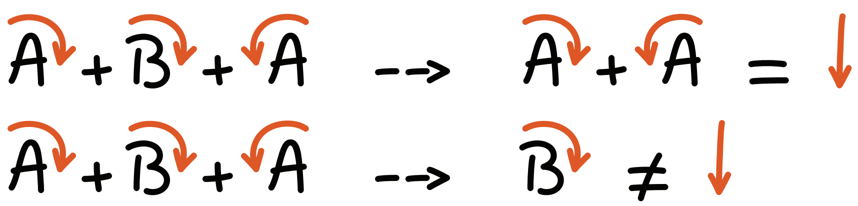
We kunnen ineens nog een rekenregel afleiden. Als een lus in wijzerzin rond een spijker gaat en meteen daarna in tegenwijzerzin rond diezelfde, dan "heffen die elkaar op" en gaat de lus netto gewoon niet rond die spijker. Met andere woorden, de som van twee zo'n lussen is nul.

Je zou dat ook kunnen verwoorden door te zeggen dat de lussen elkaars tegengestelde zijn!

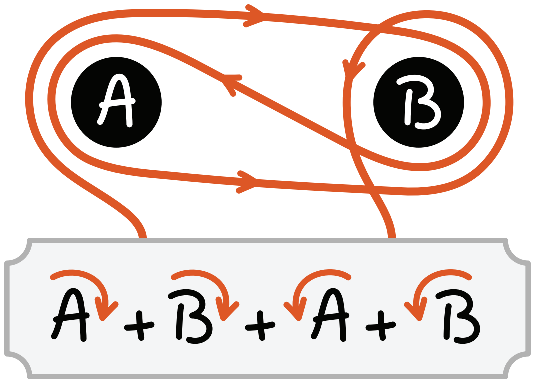


Al bij al lijken de lussen dus best goed op de ons vertrouwdere getallen: we kunnen ze optellen, aftrekken, er zijn tegengestelden, er is een nul ... Er is eigenlijk maar één wezenlijk verschil met de klassieke getallen: de volgorde van de termen in een som is van groot belang. Laat dat nu juist de eigenschap zijn die ons in staat stelt om de puzzel op te lossen!

Herinner je dat het schilderij in het allereerste voorbeeld valt na weghalen van de rechtse spijker, maar niet na weghalen van de linkse, en dat kunnen we nu inderdaad ook narekenen. Een spijker uit de muur trekken komt immers overeen met de overeenkomstige symbolen schrappen uit de somvoorstelling, ongeacht de richting van de pijl.



Oké, hoe kunnen we Uitdaging 1 kraken met die symbolische notatie? In de opgave hebben we een som nodig waarin elke spijker even vaak optreedt met een pijl in wijzerzin als tegenwijzerzin, om volledig weg te kunnen reduceren volgens de rekenregels. Fysiek betekent dat dat het koord netto niet door die spijker alleen gedragen wordt. Je ziet misschien dat je het eerste voorbeeld met één extra term kan uitbreiden naar een oplossing.



De bovenstaande vorm is best bijzonder. Mochten twee termen van plaats kunnen wisselen, dan zou die volledig vereenvoudigen naar nul. Wiskundigen noemen “van plaats mogen wisselen” ook wel *commuteren*. In feite meet de uitdrukking dus in welke mate lussen commuteren, en daarom wordt die de *commutator* van de twee lussen genoemd. Er bestaat ook een aparte notatie voor.

$$[\overset{\curvearrowright}{A}, \overset{\curvearrowright}{B}] = \overset{\curvearrowright}{A} + \overset{\curvearrowright}{B} + \overset{\curvearrowleft}{A} + \overset{\curvearrowleft}{B}$$

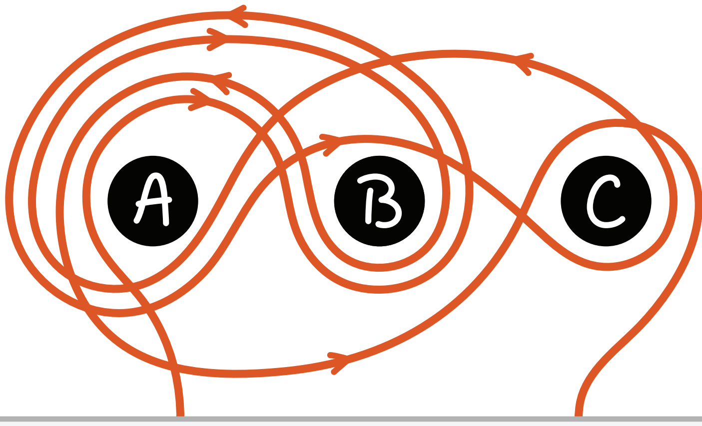
Om de oplossing uit te breiden naar een derde spijker kun je de oplossing voor twee volgen, dan rondom de derde spijker gaan, de oplossing voor twee omgekeerd volgen, en tot slot omgekeerd rond de derde spijker terugkeren. Daarin kun je opnieuw die speciale vorm herkennen: dit is de commutator van de vorige oplossing met een nieuwe lus rondom de derde spijker — een geneste commutator!

$$[[\overset{\curvearrowright}{A}, \overset{\curvearrowright}{B}], \overset{\curvearrowright}{C}]$$

Die oplossing werkt voor Uitdaging 2 en is bovendien makkelijk uit te breiden naar vier spijkers. Natuurlijk worden die heel snel groter en lastig fysiek realiseerbaar: elke nieuwe spijker doet de formule meer dan dubbel zo lang worden!

De onderstaande tekening illustreert zo'n oplossing voor drie spijkers die steunt op een lichtjes andere formule (van dezelfde vorm) en wat zuiniger is in koordlengte.

$$[[A, B], C]$$



$$(A + B + A + B) + C + (B + A + B + A) + C$$

Uitdagingen 3 en 4 (en vele varianten) laten we aan jou over, maar ook hier is een symbolische notatie heel handig om systematisch te werk te gaan!

Borromeaanse ringen

Al je al eens van de Borromeaanse ringen hebt gehoord, dan doet de puzzel je er misschien aan denken. Het gaat om drie cirkelvormige figuren die op een speciale manier samenhangen: paarsgewijs zijn de ringen helemaal niet verbonden, maar desondanks zijn de drie ringen samen niet uiteen te halen. Anders gezegd: knip één ring door en de configuratie valt uiteen.

Meer weten?

Eén video zegt meer dan duizend prentjes: deze puzzel (of althans de oplossingen) wil je zeker eens in bewegende beelden zien afspelen. YouTubekanaal Stand-up Maths heeft een excellente video, net als gastspreker Jade Tan-Holmes op het kanaal van Tom Scott.

- Stand-up Maths, *How to mathematically hang a picture (badly).*
- Tom Scott / Jade Tan-Holmes, *How knot to hang a painting.*

Wil je het wiskundige artikel lezen over deze puzzel?

- Erik Demaine, Martin Demaine, Yair Minsky, Joseph Mitchell, Ronald Rivest, Mihai Patrascu, *Picture-hanging puzzles.* arXiv, 2014, https://arxiv.org/abs/1203.3602.

Ben je al wat vertrouwd met abstracte algebra en heb je in de rekenregels de structuur van een *groep* herkend? Dan geven we je graag mee dat de groep in kwestie een *homotopiegroep* wordt genoemd. Je kunt er veel informatie uit halen over de “gaten” in de ruimte waarin je lussen zich bevinden.

Vraag je je af wat de formule op het schilderij in godsnaam voorstelt? De vallende appel doet je wellicht aan Isaac Newton denken, die volgens het verhaal door een onfortuinlijk voorval onder een appelboom de inspiratie kreeg voor zijn zwaartekrachtstheorie. De modernere relativiteitstheorie van Albert Einstein geeft een exactere beschrijving van zwaartekracht, door de (meetkundige) kromming van ruimtetijd uit te drukken in termen van (fysische) massa en energie.

Het is uiteraard onbegonnen werk om hier de vergelijkingen van Einstein uit de doeken te doen. We verwijzen hier dan ook naar deze video met een goeie introductie.

World Science Festival,
Unpacking the complexity of the Einstein equations