Conways soldaatjes

UITDAGING

Hoe ver krijg jij de soldaatjes over de frontlinie?

Je mag zelf kiezen hoe groot je leger is
en in welke startopstelling je die op het bord zet,
zolang je maar volledig vóór de lijn begint.

Soldaatjes op het bord springen zoals in het klassieke solitairespel: een soldaatje kan over één ander soldaatje naar een leeg veld springen, waarna die middenste dan wordt weggenomen. Diagonaal mag niet!

Met een leger van twee soldaatjes kan je dus moeiteloos nét over de frontlinie springen. Kun jij een leger opstellen waarmee je verder geraakt dan dat?

Je vindt deze bundel ook op onze website.

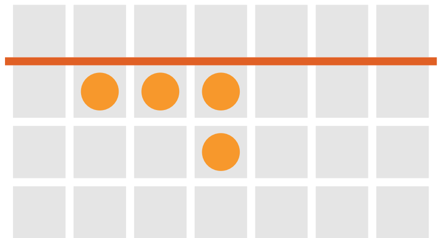
Deze uitdaging zou zijn bedacht door Brits wiskundige John Horton Conway in 1961, al zijn daar geen referenties voor terug te vinden. Wel staat vast dat Conway, samen met Elwyn Berlekamp en Richard Guy, een analyse van deze puzzel (en varianten daarvan) beschreef in de geprezen boekenreeks *Winning Ways for Your Mathematical Plays*.

De 15-jarige protagonist in het boek *The curious incident of the dog in the night-time* van Mark Haddon noemt de puzzel van Conway ...

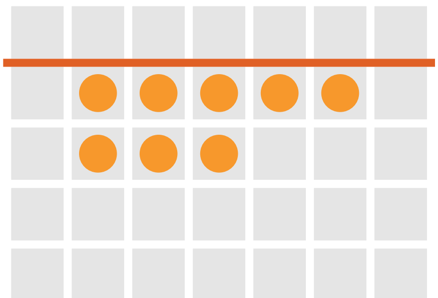
> *"a good maths problem to do in your head when you don't want to think about something else because you can make it as complicated as you need to fill your brain by making the board as big as you want and the moves as complicated as you want."*

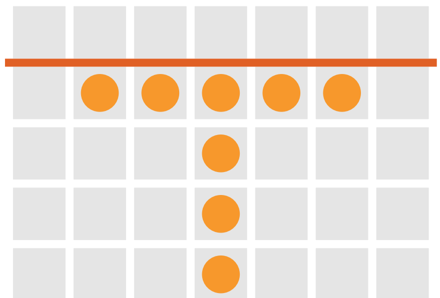
Conways soldaatjes

Als je gewoon even probeert, geraak je hopelijk wel tot aan de tweede rij, met bijvoorbeeld de configuratie hiernaast (in bovenaanzicht).



Hoe geraken we verder? De makkelijkste manier om de volgende rij te bereiken, is de laatste startconfiguratie één rij doorschuiven, tot over de lijn. Dat is uiteraard nog geen reglementaire startpositie, maar je kan die dan proberen "reverse-engineren" door achteruit te werken naar een positie die wél volledig achter de lijn ligt. Voor de derde lijn vind je zo misschien de oplossing hieronder links. Door gewoon wat te proberen, kan je ook andere mogelijke startconfiguraties vinden, zoals deze hieronder rechts. Zie jij hoe je met deze legers tot de derde lijn kan springen?





We geven hier geen oplossing voor het volgende level, maar we verklappen enkel dat het meest efficiënte leger dat tot aan de vierde rij kan doordringen, uit 20 soldaatjes bestaat.

Met welk leger geraken we nu aan level vijf?

Verrassend genoeg ... lukt dat niet. Hoe groot je startconfiguratie ook is, en hoe je de soldaatjes ook positioneert, het is *onmogelijk* om tot aan de vijfde rij te springen!

Mathologer, *How did Fibonacci beat the Solitaire army?*

We beschrijven hier in vogelvlucht waarom rij vijf in de puzzel onbereikbaar is. In de video hiernaast vind je meer details en toffe bijhorende animaties!

Fibonaccigetallen

Conway zelf heeft aangetoond dat rij vijf onbereikbaar is met een wat technischere berekening die steunt op de gulden snede en oneindige reeksen. Martin Aigner vond een gelijkaardig bewijs dat heel mooi gebruik maakt van de alombekende Fibonaccigetallen! Beginnend bij twee keer 1 is elke volgende term in de rij de som van de twee voorgaande.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

Een charmante eigenschap van die rij is dat als je de begintermen tot een zekere positie optelt, je altijd precies één minder verkrijgt dan het Fibonaccigetal twee posities verder. Zo is

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 89 - 1.$$

Hoe kunnen we nu de Fibonaccigetallen en hun sommen herkennen in de puzzel van Conway? Het cruciale idee is om op een slimme manier alle velden in het bord een waarde toe te kennen, opdat geldige solitairezetten de totale waarde van de bezette velden nooit doen toenemen. Als de waarden op rij vijf dan nóg hoger zijn, kun je daaruit besluiten dat je nooit zo ver kan geraken. De getallen van Fibonacci komen hiervoor precies van pas.

Stel dat er wél een bepaalde startconfiguratie zouden kunnen springen tot aan rij vijf. Hoe groot die ook mag wezen, je kan die omsluiten met een driehoekige afbakening zoals op de figuur op de volgende bladzijde — de figuur in kwestie toont een specifiek voorbeeld, maar het principe is toepasbaar op gelijk welke grootte. Schrijf de Fibonaccigetallen in volgorde binnen alle velden van de driehoek en alle velden boven de lijn, oplopend naar het midden toe en naar boven toe.

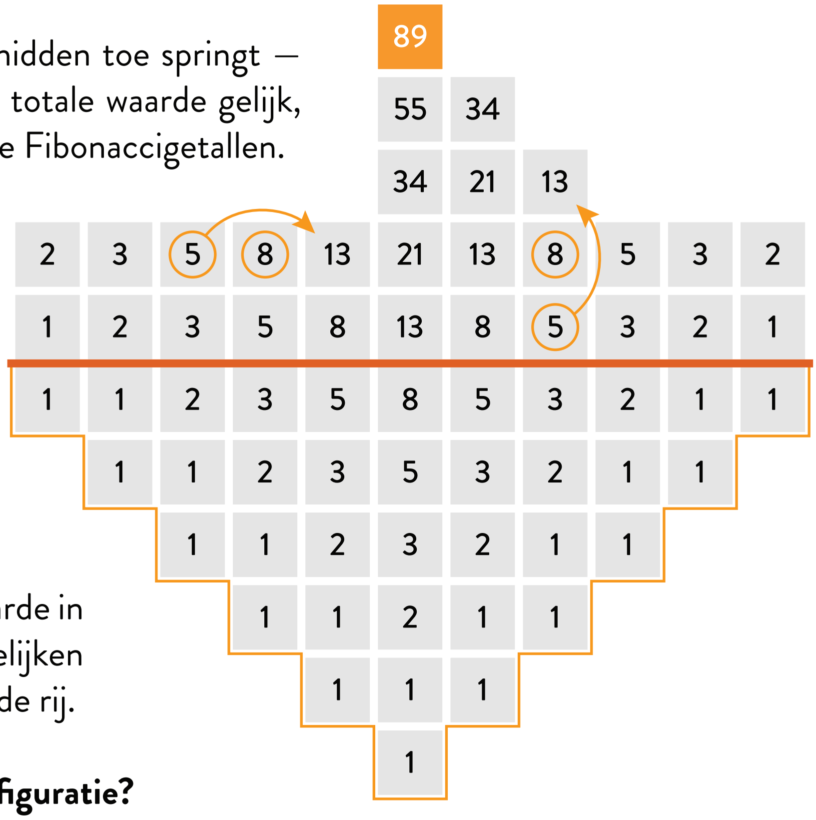
Wat doet een soldatensprong met de totale waarde van de bezette velden?

Een soldaat die omhoog of naar het midden toe springt — kortom, richting het doel — houdt de totale waarde gelijk, door de definiërende eigenschap van de Fibonaccigetallen.

Een sprong omlaag of naar buiten toe — kortom, van het doel weg — doet de totale waarde dalen.

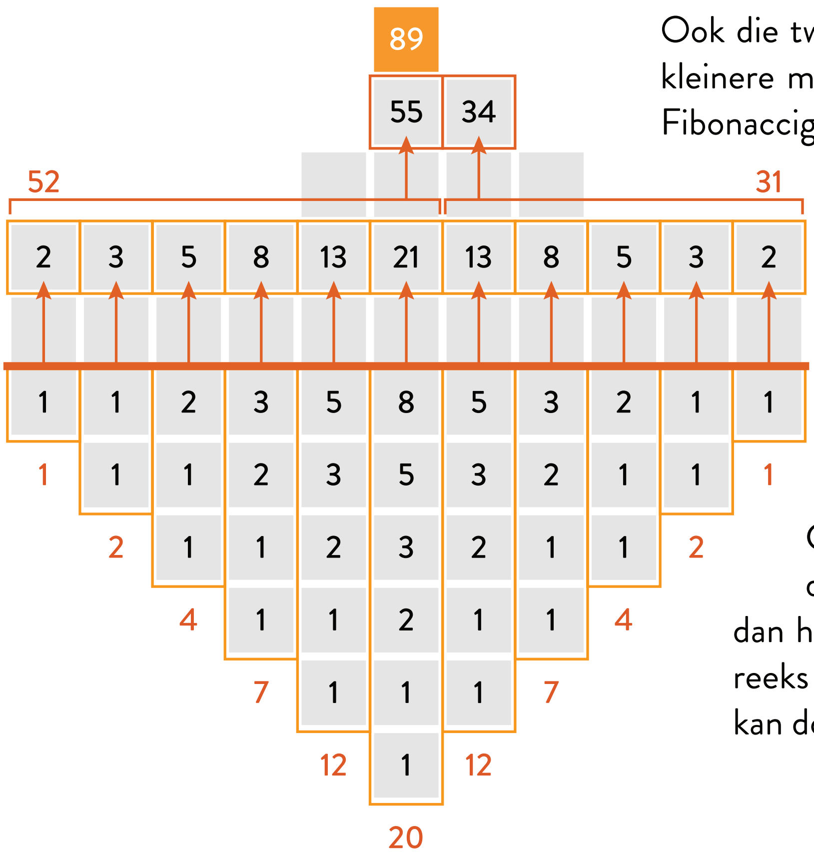
De waarde van alle bezette velden kan tijdens het springen dus alleen maar afnemen, nooit toenemen.

Nu is het een kwestie van de totale waarde in de startconfiguratie tellen en die vergelijken met het gewicht van het doel in de vijfde rij.



Wat is de totale waarde in de startconfiguratie?

Als je de driehoek onderverdeelt in kolommen, dan is de som van de waarden best eenvoudig uit te rekenen met de sommatie-eigenschap van de Fibonaccigetallen: we zien dat de som in elke kolom (onder de lijn) juist ééntje minder is dan het overeenkomstige gewicht in rij twee.



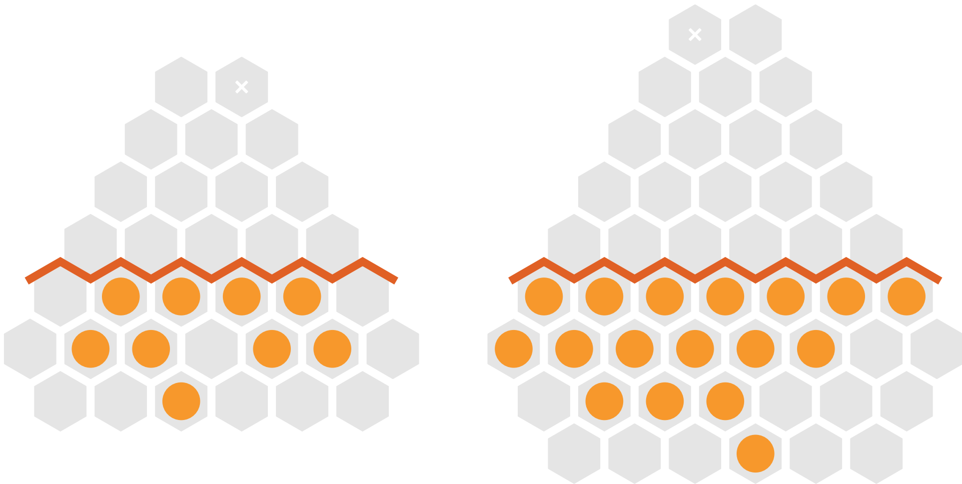
Ook die tweede rij kun je onderverdelen in twee kleinere met opnieuw een aantal opeenvolgende Fibonaccigetallen, zij het zonder starttermen 1, 1. De som is dan ook opnieuw kleiner dan twee velden hoger, in rij vier (om exact te zijn, drie minder).

En tot slot is de som van die twee velden in rij vier juist de waarde van het doelveld in rij vijf.

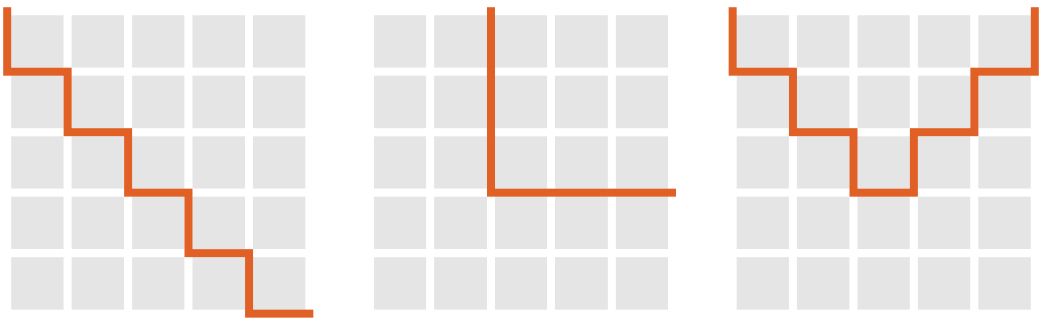
Conclusie: de totale waarde in de hele driehoek onder de lijn bedraagt minder dan het bewuste veld op rij vijf. Omdat een reeks geldige zetten die waarde alleen maar kan doen zakken, is rij vijf dus onbereikbaar!

Varianten

Op het spel van Conway bestaan tal van variaties. Met een flexibeler leger dat ook diagonaal kan springen, kun je nog tot aan de achtste lijn geraken (met 123 soldaten), maar loopt het daar dan opnieuw vast. Als je uitsluitend diagonaal mag springen, dan geraak je nog tot aan rij zes. Als je over een zeshoekig rooster beweegt, dan kan je tot aan de zevende lijn proberen springen; verder is hopeloos. De opstellingen hieronder zijn de efficiëntste manieren om de vierde en vijfde rij binnen te vallen, met 9 respectievelijk 17 soldaatjes — zie jij hoe ze moeten springen?



Je kan anderzijds ook de vorm van de frontlinie aanpassen en trachten een schuin halfvlak, een kwadrant of een schuin kwadrant zo diep mogelijk binnen te dringen. En gelijkaardige varianten lukken natuurlijk ook op een zeshoekig rooster.



En als al deze varianten op tweedimensionale borden nog niet genoeg zijn, kun je nog altijd een dimensie hoger kijken! Het analoge spel in drie dimensies kun je tot zeven stappen ver spelen, en in het algemeen kun je precies tot en met rij $3n - 2$ geraken op een spelbord met n dimensies. Het is alleen jammer dat de puzzel nogal moeilijk fysiek te realiseren valt in hogere dimensies ...

Meer weten?

Zoals eerder aanbevolen, is er op YouTubekanaal Mathologer een voortreffelijke video te vinden vol animaties. Ook Numberphile heeft een video met het oorspronkelijke, technischere bewijs van John Conway.

- Mathologer, *How did Fibonacci beat the Solitaire army?*
- Numberphile, *Conway Checkers.*

Benieuwd naar een *murder mystery* waarin de autistische 15-jarige Christopher met een fixatie op wiskunde de moord op de hond van de buurvrouw onderzoekt?

- Mark Haddon, *The curious incident of the dog in the night-time.* Vintage Publishing, 2004.
- Mark Haddon, *Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht.* Rainbow, 2019.

Heb je zin in meer puzzels in dit genre, inclusief wiskundige analyses? Dan zijn volgende boeken absolute aanraders!

- Elwyn Berlekamp, John Conway, Richard Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays (vol. 1, 2, 3, 4).* A. K. Peters Ltd., 2001–2004.

Geïnteresseerd in meer details voor tal van varianten van de puzzel? Een aantal relevante artikels zijn de volgende.

- Martin Aigner, *Moving into the desert with Fibonacci.* Mathematics Magazine, vol. 70, no. 1, 1997, p. 11–21.
- George Bell, Daniel Hirschberg, Pablo Guerrero-García, *The minimum size required of a solitaire army.* Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, vol. 7, 2007, #G07.
- Bela Csakany, Rozalia Juhasz, *The solitaire army reinspected.* Mathematics Magazine, vol. 73, no. 5, 2000, p. 354–362.
- Henrik Eriksson, Bernt Lindström, *Twin jumping checkers in $\mathbb{Z}^d$.* European Journal of Combinatorics, vol. 16, 1995, p. 153–157.