Schaakmaterie

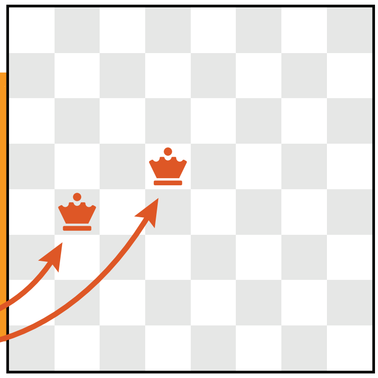
Herinner je dat een dame in het schaken horizontaal, verticaal én diagonaal aanvalt.

UITDAGING 1

Krijg jij precies acht dames op het schaakbord, op zo'n manier dat geen enkele dame een andere aanvalt?

UITDAGING 2

Zet twee dames op deze posities. Krijg jij nog eens zes dames op het bord, op zo'n manier dat geen enkele dame een andere aanvalt?



UITDAGING 3

Krijg jij vijf dames op het bord die samen alle andere velden van het bord aanvallen?

UITDAGING 4

Krijg jij acht witte en elf zwarte dames op het bord, op zo'n manier dat een witte dame nooit een zwarte dame aanvalt en omgekeerd?

Zelfde vraag voor negen witte en tien zwarte dames.

Je vindt deze bundel ook op onze website.

Het 8-damesprobleem

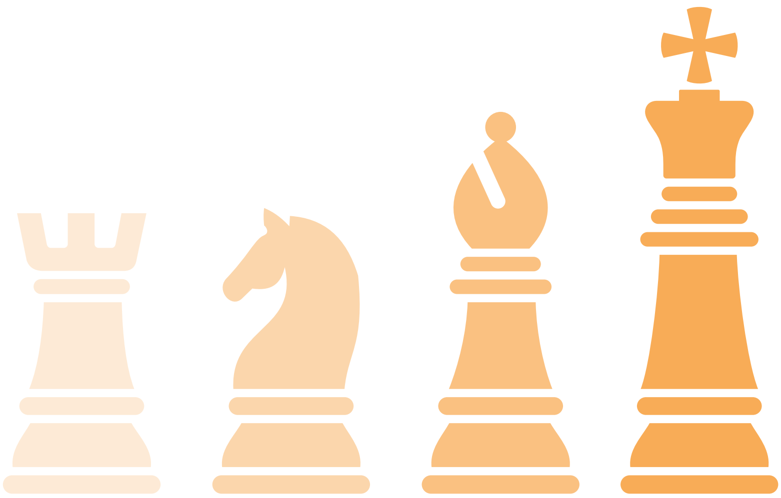
Uitdaging 1 is zeker niet nieuw: in 1848 verscheen deze in een schaakmagazine, en in 1850 werd een eerste analyse en oplossing gepubliceerd door Franz Nauck. Hij gaf een volledige oplijsting van de 92 mogelijke oplossingen voor deze puzzel.

Nauck bekeek meteen ook hetzelfde probleem op schaakborden van andere groottes, zoals bijvoorbeeld 20 dames op een bord van 20 × 20. Wat blijkt? Op een klein bord van 2 × 2 of 3 × 3 zijn er geen oplossingen (zoals je ook snel zelf even kan checken), maar vanaf 4 × 4 is elke puzzel oplosbaar — en zelfs op steeds meer verschillende manieren.

Tal van wiskundigen hebben er hun tanden in gezet en resultaten geboekt, maar desondanks zijn het uiteindelijk toch vooral computers die de exacte aantallen oplossingen kunnen berekenen. Zelfs met wat slimme trucjes dien je immers nog steeds gigantisch veel mogelijkheden te overlopen … Ondertussen zijn de precieze aantallen gekend tot en met 27 dames.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200

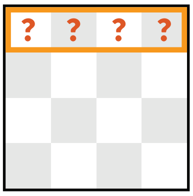
Heel recent nog, in augustus 2021, boekte Michael Simkin vooruitgang met een scherp resultaat omtrent het algemene aantal oplossingen. Wat blijkt? Op een bord van $n \times n$, dus met n dames, zijn er ongeveer $(0.143n)^n$ oplossingen. Voor kleine n zit die schatting er serieus naast, maar naarmate n toeneemt, wordt die steeds nauwkeuriger.



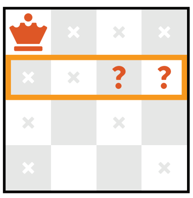
Backtracking

Zelfs met een computer is het even nadenken hoe je efficiënt naar oplossingen zoekt. Je zou domweg alle mogelijkheden kunnen overlopen om in elke rij één dame te plaatsen, maar dat zijn er meer dan 16 miljoen ... Er zijn gelukkig allerlei manieren om het slimmer aan te pakken. Eén van de eenvoudigste principes — die ook in heel wat andere puzzels nuttig is — is *backtracking*.

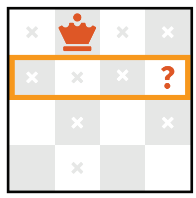
Backtracking is in essentie een systematische manier om partiële oplossingen op te stellen en te corrigeren indien nodig. We illustreren de techniek op een bord van 4 × 4.

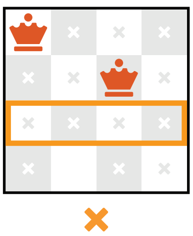


« Kies in de eerste rij de eerste mogelijke positie om een dame te plaatsen. Dat is uiteraard gewoon het veld in de hoek linksboven.

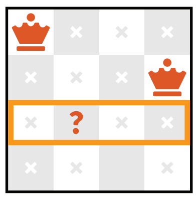


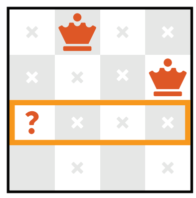
« Bekijk vervolgens de tweede rij. We kunnen daar al twee velden schrappen, dus blijven er twee posities over. Plaats opnieuw een dame in de eerste vrije positie.



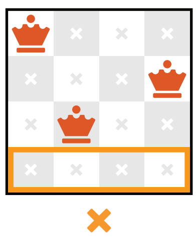


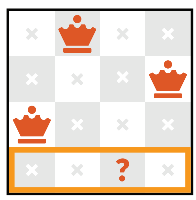
« Bekijk vervolgens de derde rij. Daar zijn geen vrije posities meer over, dus deze partiële oplossing loopt vast!



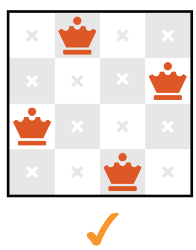


» Spoel daarom terug naar de laatst gemaakte keuze, maak die ongedaan en probeer de volgende positie in de plaats. Dat is hier het laatste veld in de tweede rij. Bekijk vervolgens de derde rij. Daar blijft er nog één positie over; plaats er een dame en bekijk vervolgens de vierde rij. Daar loopt het weer spaak.





» Spoel dus opnieuw terug. De mogelijkheden in de tweede rij zijn uitgeput, zonder succes. Keer dus nóg een stap terug en verplaats de originele dame in de eerste rij naar de eerstvolgende vrije positie. Na nog een paar stappen vinden we uiteindelijk een geldige oplossing!



P versus NP

Franz Nauck, die de puzzel ook als eerste volledig oploste, heeft ook Uitdaging 2 gesteld. Daar zijn er nog slechts twee oplossingen! Het is verleidelijk te denken dat een aantal vooropgegeven dames de puzzel makkelijker maakt, maar niets is minder waar. Als je mag vertrekken vanuit een leeg bord, dan kun je bepaalde patronen vinden die leiden tot oplossingen voor eender hoeveel dames. Maar als je een zekere startconfiguratie gegeven krijgt, dan zit er niet veel anders op dan systematisch mogelijkheden afgaan (bijvoorbeeld met backtracking) en hopen dat er ene werkt.

Controleren of een configuratie dames überhaupt uitbreidbaar is naar het volledige bord, is ook voor computers heel lastig, in een precieze zin. In de theoretische informatica bestudeert men een aantal klassen die uitdrukken hoe lastig een probleem is.

P

De klasse **P** bevat problemen die, ruw gezegd, efficiënt *op te lossen* zijn: als de instanties groter worden, dan blijft de benodigde tijd om oplossingen te vinden al bij al binnen de perken.

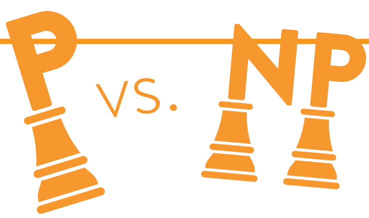
» *Is het woord **LEPEL** een palindroom?*
» *Zit het woord **MELOEN** in **KAMELEON**?*
» *Bevat deze lijst het getal 42?*
{13, -7, -3, 5, 8, 42, -2, -56}
» *Is 2023 een priemgetal?*

NP

De klasse **NP** bevat problemen die, ruw gezegd, efficiënt *te verifiëren* zijn: oplossen kan lastig zijn, maar als je een oplossing voorgeschoteld krijgt, kun je wel snel controleren of die correct is.

» *Bevat deze lijst getallen met som nul?*
{13, -7, -3, 5, 8, 42, -2, -56}
» *Is deze landkaart inkleurbaar met drie kleuren, als geen aangrenzende landen eenzelfde kleur mogen krijgen?*

Elk **P**-probleem is ook **NP**, want dan kan je immers een oplossing verifiëren door meteen een oplossing te berekenen en te vergelijken. Maar hoe zit het omgekeerd? Die kwestie, **P** versus **NP**, is één van de grootste open vragen in de informatica. *Als je oplossingen snel kan controleren, kan je ze dan ook snel vinden?*



Het is geen verrassing dat het vervolledigen-van-dames-probleem tot **NP** behoort: controleren of twee dames elkaar aanvallen, is immers niet zo moeilijk. In 2017 toonden Ian Gent, Christopher Jefferson en Peter Nightingale aan dat het probleem **NP-compleet** is — minstens zo moeilijk als elk ander probleem in **NP**. Een efficiënte manier om deze puzzel te kraken, ook op grotere schaakborden en arbitraire start-configuraties, zou zo **P** versus **NP** uitklaren.

Deze voortreffelijke video geeft meer achtergrond en voorbeelden voor de complexiteitsklassen **P** *en* **NP**, *legt de relevantie ervan uit in hedendaags onderzoek, en vertelt hoe je er $1.000.000 mee kan verdienen!*

hackerdashery, *P vs. NP and the computational complexity zoo*

Dominante en niet-dominante dames

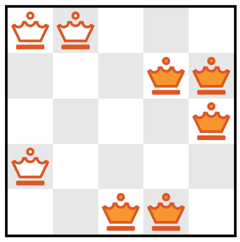
Uitdaging 3 heeft te maken met zogenaamde *dominantiegetallen* van het schaakbord. Hoeveel dames heb je minstens nodig om alle velden van het bord aan te vallen? Voor een bord van 8 × 8 blijken dat er dus vijf te zijn. Dankzij computerzoektochten kent men ook de precieze getallen voor alle borden tot en met 25 × 25 groot. Veel regelmaat lijkt er niet in te zitten, al suggereren de resultaten dat er min of meer $n/2$ dames nodig zijn voor een bord van $n \times n$.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	8	9	9	9	9	10	11

Uitdaging 4 tot slot stelt het omgekeerde probleem: plaats de dames op het bord en probeer zo veel mogelijk velden te ontwijken (opdat daar de dames van het ander kleur kunnen staan). De tabel hieronder geeft het maximale aantal veilige velden weer bij n dames op een bord van $n \times n$.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	3	5	7	11	18	22	30	36	47	56	72	82	97?

De puzzel met vijf en drie dames op een bord van 5 × 5 is opmerkelijk: er is in essentie maar één oplossing (op spiegelingen en rotaties na).



Meer weten?

Wil je het 8-damesprobleem herbekijken op een laagdrempelig kanaal?

- Numberphile, *The 8 queen problem.*
- Quanta Magazine, *Mathematician answers chess problem about attacking queens.*

Heb je zin in meer schaakbordpuzzels en analyses daarvan? Bekijk dan volgende boeken eens.

- Miodrag Petković, *Mathematics and Chess: 110 Entertaining Problems and Solutions.* Dover Publications, 2011.
- John Watkins, *Across the board: the mathematics of chessboard problems.* Princeton University Press, 2012.

Geïnteresseerd in het originele artikel van Nauck of de geschiedenis van de acht dames?

- Paul Campbell, *Gauss and the eight queens problem: a study in miniature of the propagation of historical error.* Historia Mathematica, vol. 4, 1997, p. 397–404.
- Franz Nauck, *Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr. Nauck in Schleusingen.* Illustrirte Zeitung, vol. 14, no. 361, 1850, p. 352.

Wil je de artikels of preprints met de technische details van de recente resultaten uitpluizen?

- Michael Simkin, *The number of n-queens configurations.* arXiv, 2021, https://arxiv.org/abs/2107.13460.
- Ian Gent, Christopher Jefferson, Peter Nightingale, *Complexity of n-queens completion.* Journal of Artificial Intelligence Research, vol. 59, 2017, p. 815–848.

Ben je benieuwd hoe de opgelijste getallen in de tabellen verder gaan? Voor zover ze gekend zijn, kun je die terugvinden in de On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

- OEIS, A000170.
- OEIS, A001366.
- OEIS, A075458.