Einsteins hoedje

UITDAGING

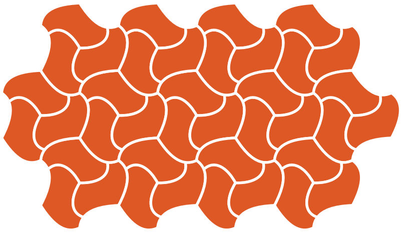
Kun jij de tafel volleggen
met deze puzzelstukjes
zonder gaten over te laten?

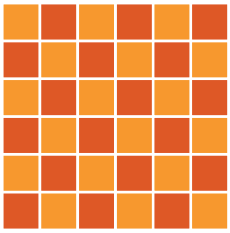
Je mag puzzelstukjes ondersteboven leggen.

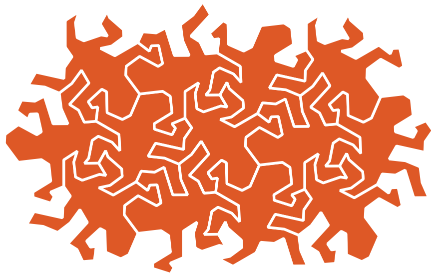
Je vindt deze bundel
ook op onze website.

Betegelingen

Een *betegeling* of ook wel *tessellatie* is een manier om het vlak volledig te bedekken met kopieën van een beperkte set kleine tegels (die eventueel gedraaid en gespiegeld mogen zijn). Je kent ongetwijfeld allerlei voorbeelden: een schaakbordpatroon van kleine vierkantjes, een muur met rechthoekige bakstenen, een honingraatpatroon van zeshoeken, een plaveisel met straatstenen in originele vormen, ...





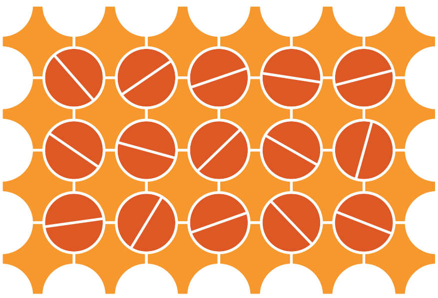


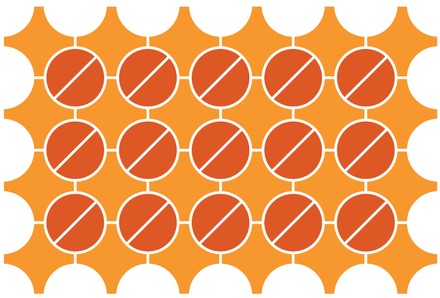
Betegelingen inspireren de mens al millennialang. In allerlei kunstvormen worden betegelingen gretig verwerkt, van Islamitische architectuur tot de werken van M. C. Escher. Tal van puzzels steunen erop, maar ze kennen ook serieuzere toepassingen in bijvoorbeeld efficiënt verbruik van productiematerialen. En ook in de natuur zijn betegelingen alomtegenwoordig: naast honingraten zijn er kristalstructuren, zeepbellen, ...

Een periodiek systeem?

Zowat elke betegeling die je in het dagelijkse leven tegenkomt, is *periodiek*: er zit een patroon in dat zich steeds opnieuw herhaalt. Zo een periodieke betegeling kun je op de muur zetten door identieke stroken behangpapier naast elkaar te plakken.

Maar niet elke betegeling is periodiek. Hieronder vind je een voorbeeld met twee bouwblokjes: een halve cirkel en een kruisvormig stukje om de gaten te vullen. Door de paren halve cirkels telkens in een willekeurige oriëntatie te plaatsen zoals in de figuur links, kun je er zeker van zijn dat de gehele betegeling méér is dan een enkel herhalend fragmentje.



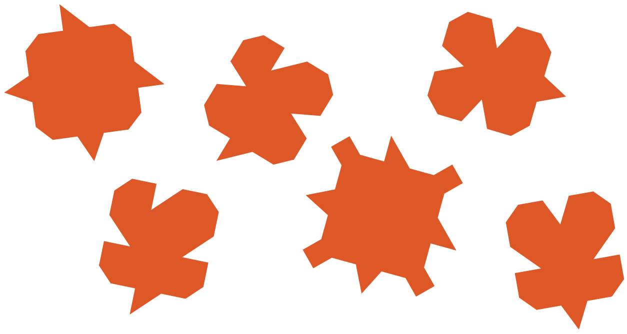


Maar diezelfde puzzelstukjes kun je ook gewoon wél periodiek leggen, zoals in de figuur rechts.

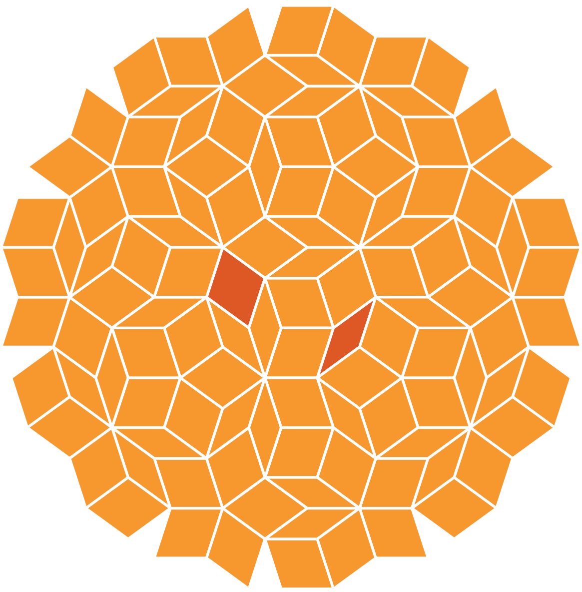
Hao Wang vermoedde in 1961 dat dat altijd het geval zou zijn: hij dacht dat elke set van puzzelstukjes die een *aperiodieke* betegeling kunnen maken, zonder herhaling, ook gewoon periodiek samengelegd kunnen worden.

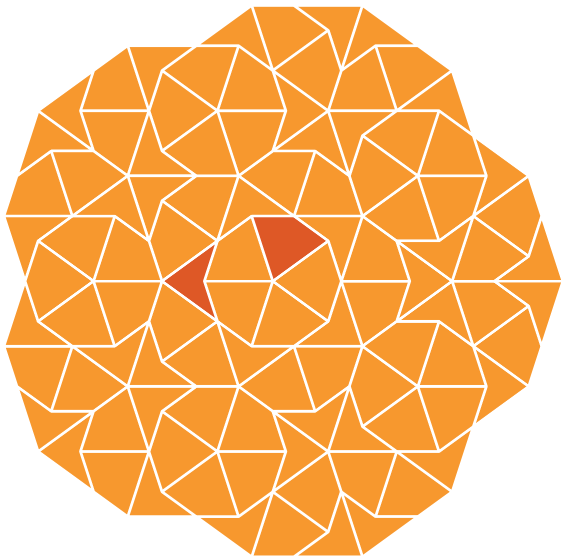
Wang had het bij het verkeerde eind — zijn student Robert Berger knutselde een paar jaren later een set van 20 264 tegels die het vlak kunnen betegelen, maar niet repetitief. Zijn constructie was gebaseerd op een vertaling vanuit een abstract wiskundig probleem, en zeker niet rechttoe rechtaan opgesteld of geanalyseerd, maar was voldoende om Wangs vermoeden te ontkrachten.

Het duurde niet lang vooraleer ook efficiëntere oplossingen met minder tegels werden ontdekt. Berger zelf kon zijn aantal naar 104 reduceren, Hans Läuchli vond een set van 40 gelijkaardige tegels, en Raphael Robinson een charmante set van de zes tegels hiernaast in 1971.

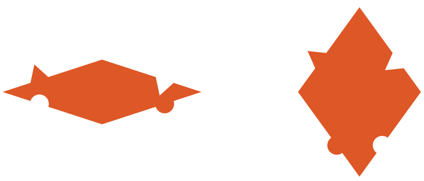


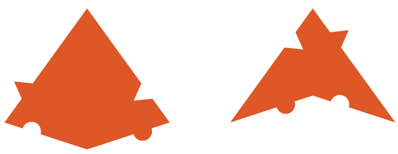
In 1974 werd dat record opnieuw verbroken met slechts twee, verbluffend elegante tegeltjes. Roger Penrose ontdekte een prachtige betegeling met vijfvoudige symmetrie die zich niet laat vangen in een enkel terugkerend fragment. Er zijn twee gangbare vormen: eentje met een pijl- en vliegervorm, en eentje met twee ruitvormige stukjes.





Wie goed oplet, ziet misschien dat de Penrosetegels zoals hier afgebeeld wél periodiek tegelen. Strikt genomen hebben ze eigenlijk enkele inkepingen nodig om aperiodiciteit te garanderen, zoals bij de tegels van Robinson, maar deze worden heel vaak weggelaten in illustraties.





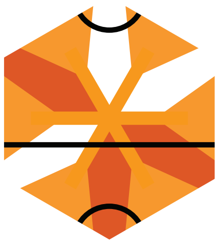
Tal van boeken en video's zijn gewijd aan de Penrosebetegeling. Deze twee video's geven een beknopte introductie tot de geschiedenis, staan vol fraaie animaties en experimentele demonstraties, wijzen naar het verband met de gulden snede, en leggen intuïtief uit waarom de betegeling aperiodiek is.

Veritasium, *The infinite pattern that never repeats*

MinutePhysics, *Why Penrose tiles never repeat*

Op zoek naar einstein

Van meer dan 20 000 tegels naar slechts twee (in tien jaar tijd), da's een serieuze verbetering. Maar natuurlijk is de tergende vervolgvraag: kan het nog één stapje beter? Is het ook mogelijk met een enkel tegeltje? Bestaat een puzzelstukje dat het vlak betegelt … maar uiteindelijk elke vorm van herhaling doorbreekt? Die opgave stond gekend als het *einsteinprobleem*. Het heeft hoegenaamd niets te maken met 's werelds beroemdste wetenschapper, maar is niet meer dan een woordspeling: "ein Stein" betekent in het Duits gewoon "één tegel".



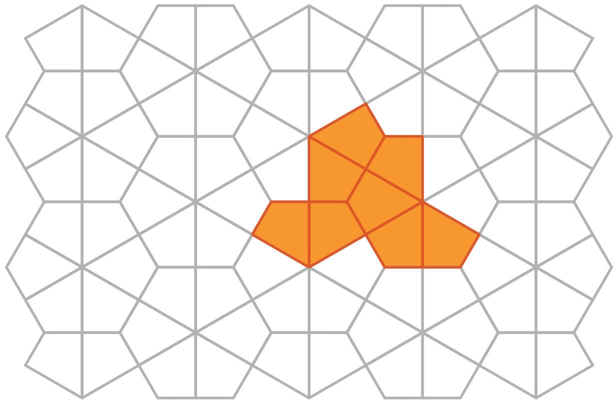
Het bleek een bijzonder pittig probleem. Er werd 40 jaar lang geen vooruitgang geboekt … tot amateurwiskundige Joan Taylor plots heel dicht in de buurt kwam. Ze ontdekte een zeshoekje met wat decoraties dat enkel aperiodiek betegelt, op voorwaarde dat alle kleuren én lijnen langs de randen matchen. Die dubbele aanduidingen klaarden de klus, maar zijn helaas niet zomaar in een ongekleurde tegel om te vormen met enkele inkepingen.

Joshua Socolar zag een aanpak om er toch een bijna-einstein uit te toveren in 2013, maar aan een kost: zijn modificatie doet de "tegel" uiteenvallen in losse stukjes. Niet echt een bevredigende oplossing dus. Bestond er ook een echte, enkelvoudige einstein? Socolar zelf was alleszins niet zeker van de zaak:

> *It is not yet clear whether computer search will beat human creativity to finding the elusive unmarked, simply connected, two-dimensional einstein — if such a thing exists at all.*

Hoedje af!

De echte doorbraak kwam er pas in november 2022, toen gepensioneerd printertechnieker en wiskundeliefhebber David Smith aan het puzzelen sloeg met een nieuw puzzelstukje. Hij kon er grote gebieden mee opvullen, maar slaagde er desondanks niet in om een herhalend patroon te creëren. Zijn vormpje bestond uit acht kleine vliegervormige stukjes van een onderverdeeld zeshoekig rooster.



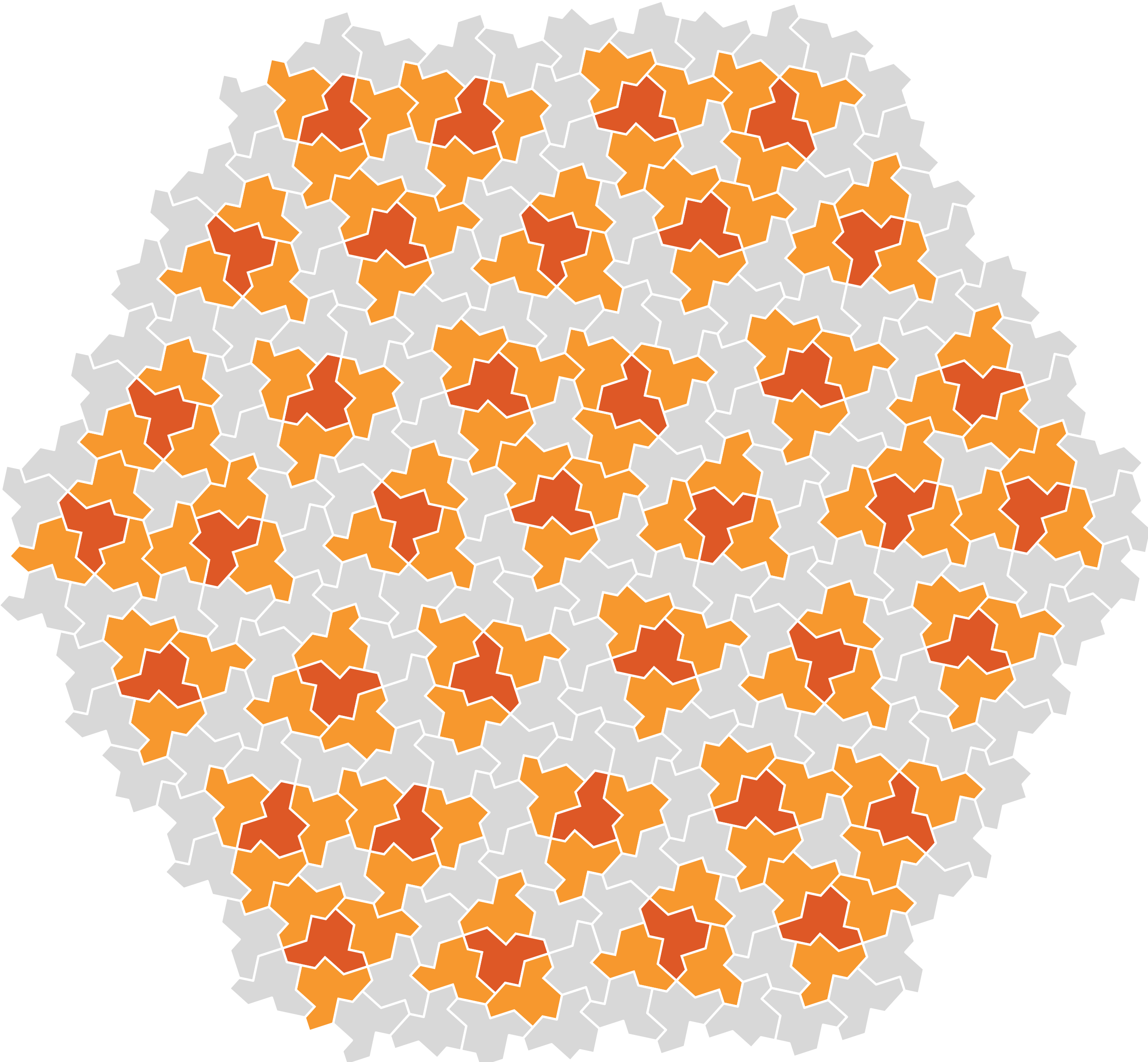
Na heel wat experimenteel handwerk schakelde Smith de hulp in van computerwetenschapper Craig Kaplan, die een programma had geschreven om betegelingen te genereren met behulp van de computer. Het resultaat was best bemoedigend: ondanks de verbluffende eenvoud van het figuurtje, zou het wel eens een langgezochte einstein kunnen zijn!

Zelfs al zou de betegeling uiteindelijk toch spaak lopen, dan nog verpulverde de nieuwe tegel van Smith records op andere vlakken. Het tweekoppige team ging dan ook verwoed aan de slag. Ze programmeerden de computer om steeds grotere betegelingen te genereren, zochten naar patronen in de resultaten, vonden varianten van het fascinerende figuurtje (dat ze het *hoedje* noemden) en betrokken Joseph Myers en Chaim Goodman-Strauss in het avontuur. Samen slaagden ze erin om vanuit de vele experimentele bevindingen ook een rigide bewijs te halen. Het hoedje is inderdaad een einstein!

Sterker nog: in hun artikel in maart 2023 presenteerden ze in één klap twee – drastisch verschillende – bewijzen. Eentje maakt gebruik van een gangbare techniek om aperiodiciteit aan te tonen, maar hun andere argument is volledig origineel en bijzonder elegant.

Deze website van de auteurs verwijst o.a. naar animaties en interactieve applets om zelf de einsteinbetegeling te genereren.

Smith, Myers, Kaplan, Goodman-Strauss,
An aperiodic monotile



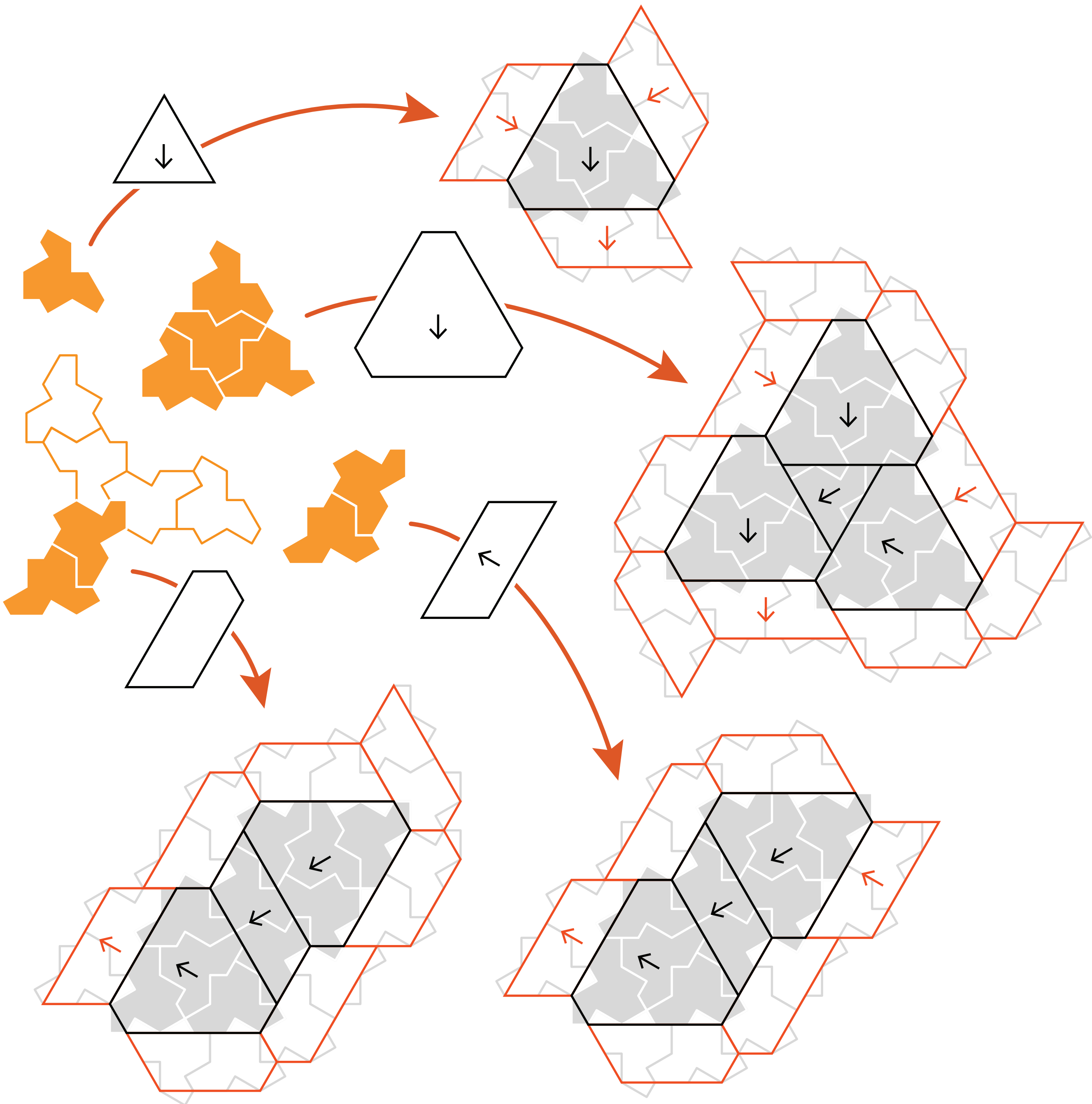
Wil je een korte en intuïtieve introductie tot deze technieken in de beide bewijzen? Lees dan verder in deze bundel of bekijk deze video van Mostly Mental.

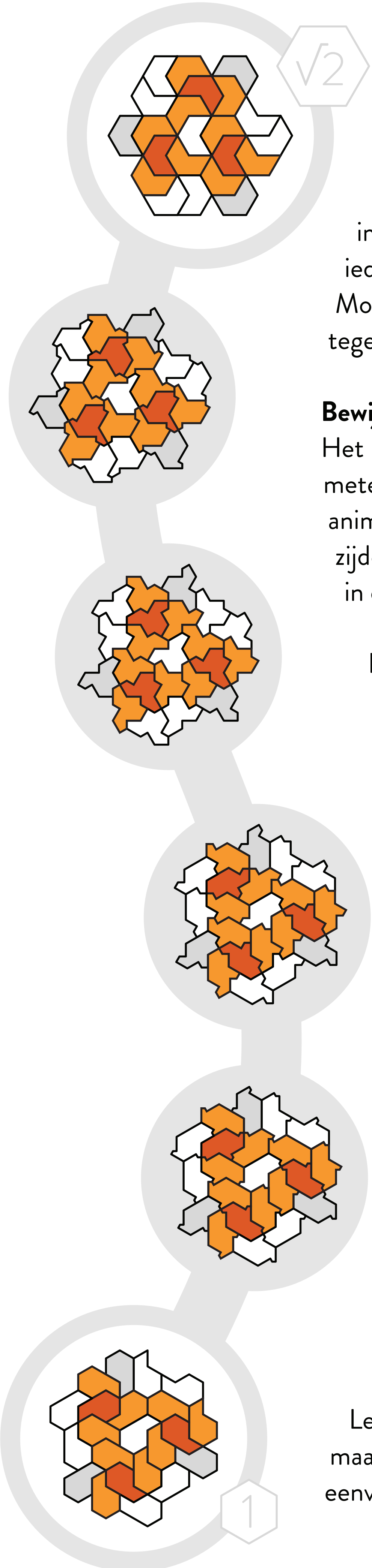
Mostly Mental, Aperiodic monotile – mad as a hat

Bewijs 1: metategels

In de uiteindelijke betegeling kun je een aantal steeds terugkerende configuraties herkennen: driehoekige clusters van vier tegels, tussenliggende spaken opgebouwd uit paren tegels, enkele losse tegels omgeven door drie clusters. Het eerste bewijs steunt op die observatie. In feite zijn er maar een beperkt aantal mogelijkheden om kleine tegeltjes aan elkaar te passen en de onderzoekers vonden een set van vier fundamentele combinaties — *metategels* genaamd. Ze toonden aan dat die metategels opnieuw niet zoveel vrijheid hebben, maar enkel in elkaar passen volgens dezelfde patronen als de originele tegels in de metategels.

De hele betegeling wordt dan stapsgewijze opgebouwd vanuit een enkele tegel, uitgebreid naar een metategel, vervolgens naar een meta-metategel ... tot in het oneindige.



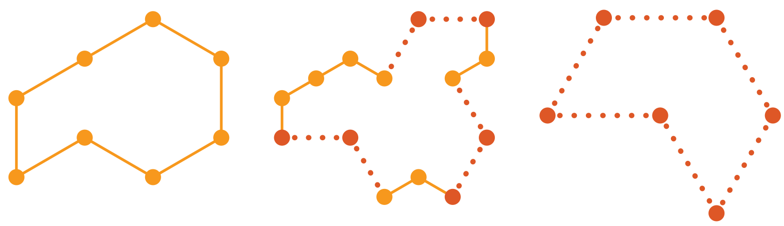


Na te verifiëren dat de puzzelstukjes alleen volgens die voorgeschreven substitutieregels in elkaar passen, konden de onderzoekers een soort van coördinaten invoeren op de tegels. Op basis van de oriëntaties van de naburige tegels valt immers te achterhalen uit welke metategel, meta-metategel, … ieder stukje afkomstig is en waar die zich bevindt in het geheel. Mocht de betegeling nu periodiek zijn, dan zouden verschillende tegels toch gelijke “coördinaten” krijgen — en dat kan niet.

Bewijs 2: in animatie

Het tweede bewijs volgt een volledig ongeziene techniek en levert meteen oneindig veel aperiodieke betegelingen op (plus een leuke animatie). De einstein heeft zijden van lengte 1, 2 en $\sqrt{3}$. Die ene zijde met lengte 2 kun je beschouwen als twee zijden met lengte 1 in elkaars verlengde en zo zijn er in essentie maar twee lengtes.

Nu blijkt dat het figuurtje mooi blijft betegelen als die lengtes onafhankelijk van elkaar variëren. Je kan met andere woorden een betegeling maken met eender welke verhouding tussen de twee zijdelengtes. Dat levert een prachtige animatie op! En in de uiterste gevallen, wanneer een lengte nul wordt, herleidt de einstein zich naar twee eenvoudige figuren: de ene leeft op een zeshoekig rooster met afstanden 1, de andere op een zeshoekig rooster met afstanden $\sqrt{2}$ (wanneer de oppervlakte gelijk blijft).



Mocht de betegeling periodiek zijn, dan ook alle andere betegelingen op het spectrum en met dezelfde periode. Maar omdat $\sqrt{2}$ irrationaal is, zijn de afstanden binnen de twee uiterste zeshoekige roosters niet “compatibel” voor een gemeenschappelijke periode.

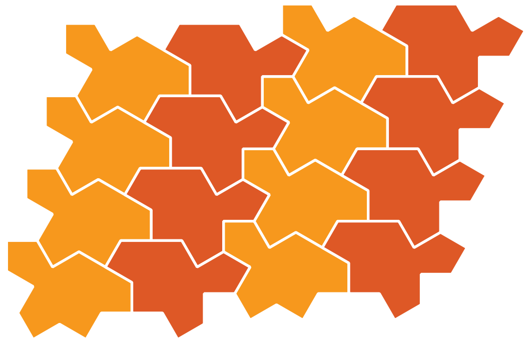
Let op: die twee uiterste vormen betegelen weliswaar aperiodiek, maar zijn daarom nog geen echte einstein, want ze laten ook een eenvoudigere periodieke betegeling toe.

Einstein in de spiegel

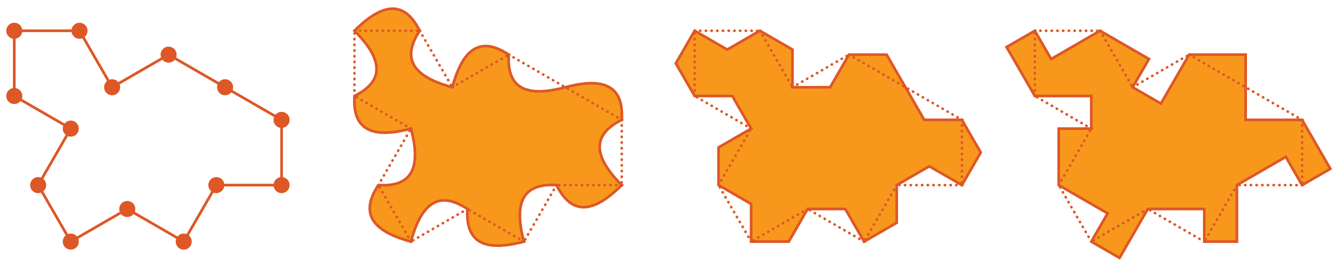
Wie goed kijkt, ziet dat enkele tegels gespiegeld opduiken in de betegeling. Uit het bewijs met de metategels valt te achterhalen hoeveel juist: in de volledige grenzeloze betegeling komt het gespiegelde stukje voor met een frequentie van $1 : \varphi^4$ (de gulden snede tot de vierde macht), oftewel ongeveer 14,6 %.

Je zou het een schoonheidsfoutje kunnen noemen dat de einstein twee oriëntaties nodig heeft. De logische vervolgvraag is natuurlijk: bestaat er een figuurtje dat enkel aperiodiek betegelt en slechts in één oriëntatie, zonder spiegelbeelden? Verrassend genoeg kwamen dezelfde auteurs Smith, Myers, Kaplan en Goodman-Strauss heel snel met het antwoord daarop. In mei 2023 deelden ze al een vervolgartikel met een variant van de einstein die precies die taak vervult!

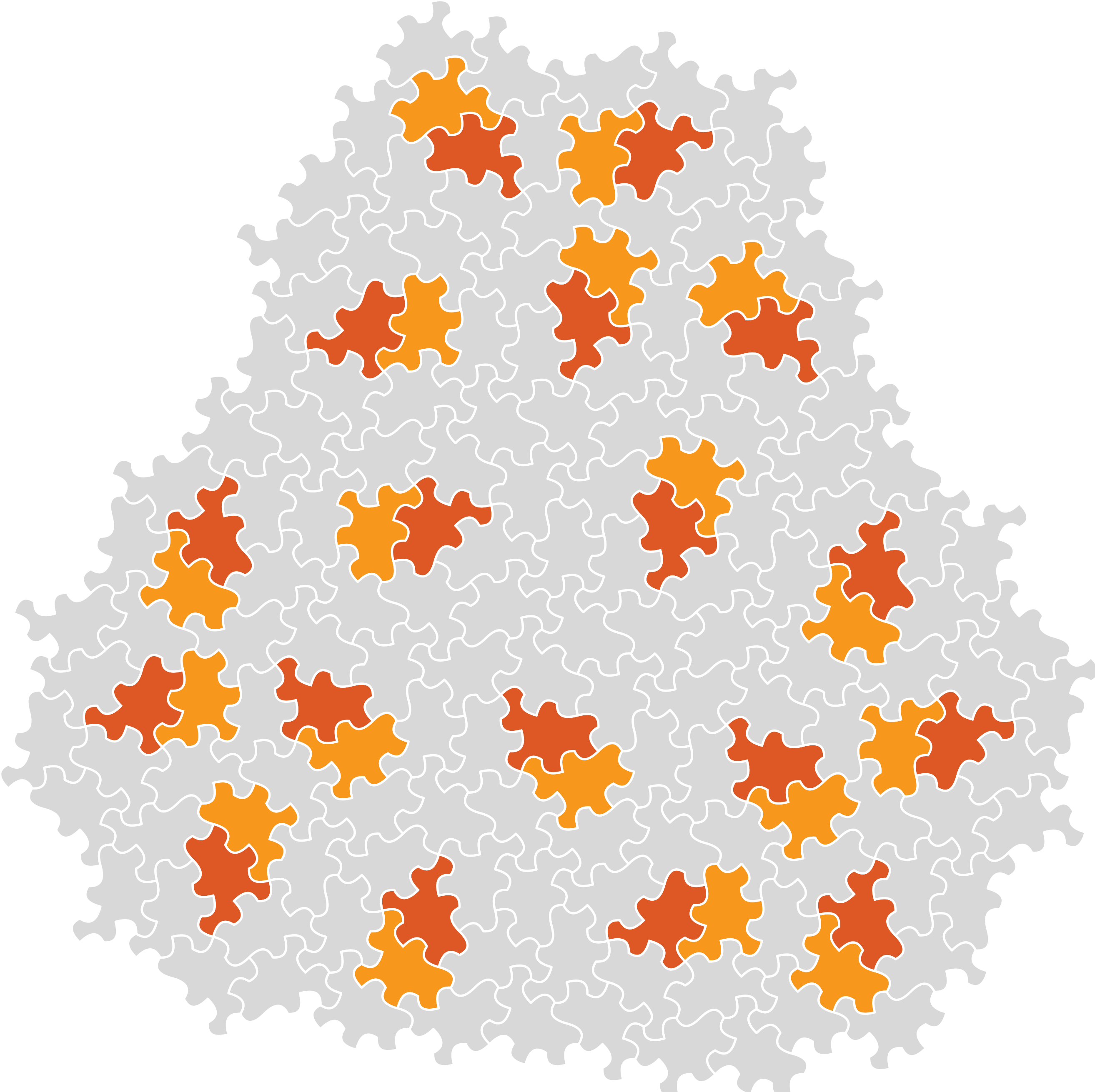
Het nieuwe vormpje is afgeleid uit het tweede bewijs. Halverwege op het spectrum staat een "gelijkzijdige" einstein, waarvan alle zijdelengtes even groot zijn. Die past niet langer op een onderliggend rooster van zeshoeken. Het is zelfs niet langer een oprechte einstein, want in die bijzondere situatie is er een eenvoudigere, periodieke betegeling mogelijk met stroken van tegels in afwisselende oriëntaties.



Toch was dit figuurtje de sleutel. De onderzoekers stelden vast dat wanneer je a priori *verbiedt* om de tegel ondersteboven te leggen, er dan weer slechts één betegeling mogelijk is ... en die is aperiodiek! Door de hoekpunten niet met lijnstukken maar wel met asymmetrische segmentjes te verbinden (op de juiste manier), kun je daarna uit dat prototype een vorm knutselen die blijft betegelen, enkel aperiodiek, maar die simpelweg niet kan aansluiten op een gespiegelde kopie. Hieronder staan enkele voorbeelden.



Het bewijs voor aperiodiciteit vergt hier enkele extra stappen en is wat complexer. Eerst worden de zijdelengtes aangepast. Zo transformeert de betegeling opnieuw naar ene op een zeshoekig rooster, zij het met *twee* prototegels (waaronder de originele einstein). Daarna is het wederom een kwestie van nagaan dat die slechts in elkaar passen volgens een beperkt systeem van metategels ... al heeft deze nieuwe vorm ineens negen zo'n metategels nodig!



Ook over de nieuwe spookeinstein heeft Mostly Mental een video, die het verband met de eerdere tegels en het bewijs voor aperiodiciteit uit de doeken doet.

Mostly Mental, *Chiral aperiodic monotile — spectre in the machine*

Meer weten?

Wil je je verdiepen in de recente artikels over de einstein of een kijkje nemen op de website?

- David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan, Chaim Goodman-Strauss, *An aperiodic monotile.* arXiv, 2023, https://arxiv.org/abs/2303.10798 en https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat.
- David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan, Chaim Goodman-Strauss, *A chiral aperiodic monotile.* arXiv, 2023, https://arxiv.org/abs/2305.17743 en https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre.

Onafhankelijk van Penrose stuitte ook amateurwiskundige Robert Ammann op de allereerste aperiodieke betegeling met slechts twee tegeltjes. Ammann heeft heel wat meer baanbrekende bijdragen geleverd aan de theorie van aperiodieke betegelingen en quasikristallen.

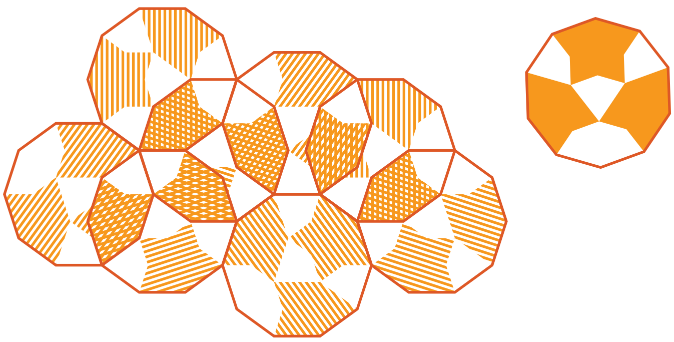
- Marjorie Senechal , *The mysterious Mr. Ammann.* The Mathematical Intelligencer, vol. 26, 2004, p. 10–21.

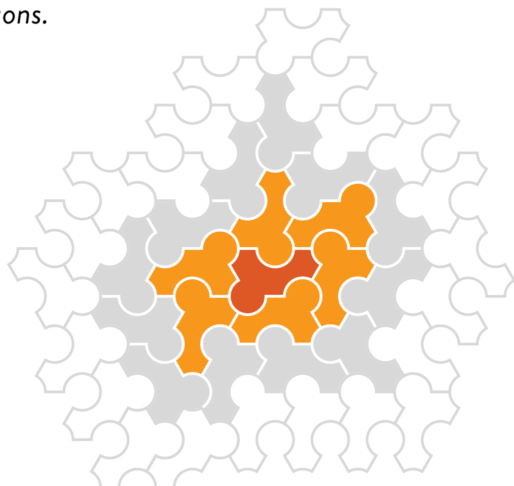
Wat, *quasikristallen*? Penrosebetegelingen (en varianten) blijken ook op te duiken in de chemie! De bouwstenen voor klassieke kristalstructuren zijn periodieke ruimtevullingen. Er zijn echter ook materialen gekend met een duidelijke structuur die zich niet zomaar herhaalt. In 2011 werd de Nobelprijs Chemie uitgereikt aan Dan Shechtman voor zijn vondst van die quasikristallen.

- Marjorie Senechal , *Crystalline symmetries: an informal mathematical introduction.* Taylor & Francis, 1990.

Een andere richting uit? Petra Gummelt ontdekte in 1994 dat de Penrosebetegeling door één enkele figuur wordt gegenereerd — een eenvoudige regelmatige tienhoek — op voorwaarde dat je die ook mag overlappen op zekere aangeduide regio's.

- Petra Gummelt, *Penrose tilings as coverings of congruent decagons.* Geometriae Dedicata, vol. 62, 1996, p. 1–17.





Ben je eerder benieuwd naar figuren die *niet* betegelen, ook al lijkt het van wel? Het *Heeschgetal* van een vormpje is het maximum aantal keren dat je die volledig kan "omringen" zoals in een betegeling. De zoektocht naar figuren met een hoog Heeschgetal is minstens zo boeiend als die naar een einstein! Het wereldrecord staat momenteel op 6: er is een figuur gekend dat een groot gebied met 6 lagen kan vullen, maar niet meer dan dat.

- Numberphile, *Heesch numbers and tiling.*