

Ur-eka!

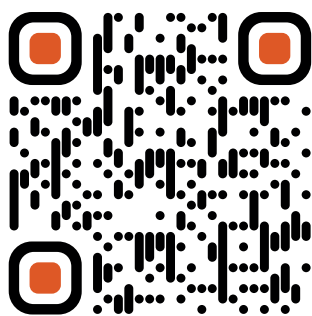
UITDAGING

Kun jij de twee kleinste puzzelstukjes
bijeenleggen tot een “driehoek” van 2 lagen,
daarna de drie kleinste tot een van 3 lagen,
de vier kleinste tot 4 lagen, ...?

Hoe ver geraak jij?



De puzzelstukjes zijn 1, 2, 3, 4, ... blokjes groot,
aangegeven met de symbolen hieronder.
Het kleinste is al een “driehoek” van 1×1.



Je vindt deze bundel
ook op onze website.

$\sqrt{3}$

Wiskunde bij de Babyloniërs

Het oude Mesopotamië of Tweestromenland was een vruchtbare regio in het Midden-Oosten waar onder meer wetenschap en technologie een grote bloei kenden. Dankzij het spijkerschrift hebben we een relatief goed beeld van hun beschaving: kleitabletten met gegraveerde symbolen doorstaan de geschiedenis immers stukken beter dan papyrus of perkament, zoals later gebruikt in Egypte, Rome en Griekenland.

Hét spijkerschrift onderging natuurlijk een uitgebreide evolutie met tal van varianten, dialecten en afsplitsingen. Getallen werden vanaf een zeker punt op een gelijkaardige manier voorgesteld, en daar kennen we tot op vandaag nog gevolgen van! De Babyloniërs noteerden kleine getallen met verticaal gepositioneerde “spijkers”. Zulke markeringen konden vlot met een rieten stylus worden aangebracht in kleitabletten. Voor cijfers in de tientallen was er een bijkomend symbool in de andere richting.

									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Voor grotere getallen ging het echter anders. Ze werkten in een 60-tallig positiestelsel, waarbij de “cijfers” van 1 tot en met 59 waren opgebouwd zoals hierboven. Daarboven werd een positie opgeschoven en herbegon het van vooraf aan: één verticale spijker stond voor 60, twee spijkers voor 120, enzoverder.

			$4 \times 60^2 = 14\,400$
			$32 \times 60^1 = 1\,920$
			$+ 25 \times 60^0 = 25$
			16 345

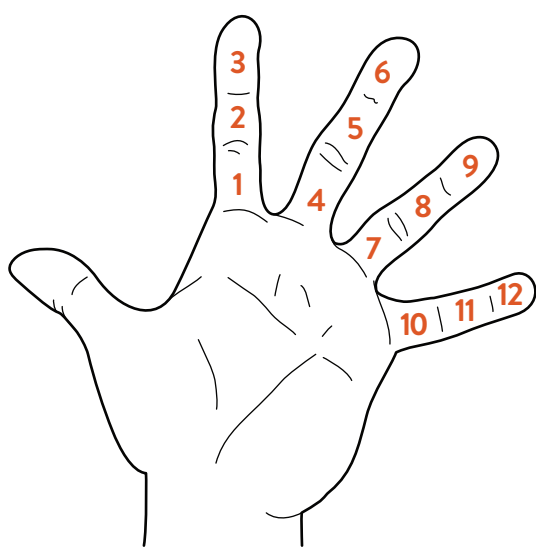
Laat ons het getal hierboven in onze vertrouwde symbolen noteren als $4'32'25 = 16\,345$.

Waarom 60? Wij zijn gewoon te werken in grondtal 10, want we hebben nu eenmaal 10 vingers om op te tellen. In dat grondtal kan je snel delen door 2 of door 5, de delers van 10. In praktijk kom je echter geregeld een deling door 3 of 4 tegen. Dat maakt een grondtal met veel delers aantrekkelijk ... en 60 is het kleinste getal dat deelbaar is door zowel 2, 3, 4, 5 als 6.

60 in praktijk

De invloed van deze Babylonische manier van rekenen voelen we tot op vandaag. Zo hebben we de opdeling van een cirkel in 360 graden aan hen te danken; volgens één theorie omdat een jaar ongeveer $6 \times 60 = 360$ dagen duurt, volgens een andere theorie om meteen de hoeken van een gelijkzijdige driehoek op te delen in 60 graden.

Ook op de klok delen we een uur nog steeds op in 60 minuten, en een minuut in 60 seconden. Dat maakt het makkelijk om te spreken over een half uur en kwartier, maar ook over een derde van een uur (ofwel 20 minuten), een vijfde (12 minuten) of een zesde (10 minuten).



Tellen tot 60 op je vingers is helemaal niet zo moeilijk: je kan met je duim telkens de drie vingerkootjes aflopen op je overige vier vingers om tot 12 te tellen, en intussen de vingers aan je andere hand gebruiken om veelvouden van 12 bij te houden (12, 24, 36, 48, 60).

Het spijkerschrift van de Babyloniërs was zeker niet het oudste schrift. Vele eeuwen eerder werden klei-tabletten al beschreven met een protospijkerschrift, o.a. om handelsberekeningen te kunnen bijhouden. Matt Parker vertelt in deze video over het ontstaan van de eerste getalsystemen met dat doel ... en over de oudst gekende rekenfout!



Dankzij hun efficiënte talstelsels waren de Babyloniërs en hun voorgangers in staat tot sterke staaltjes engineering en architectuur. Niet alleen de Egyptische piramides horen tot onze verbeelding te spreken, maar zeker ook de Mesopotamische ziggoerats (terrassvormige piramides) of de verloren gegane hangende tuinen van Babylon, een van de zeven wereldwonderen. Men vermoedt dat de mythische toren van Babel verwijst naar een Babylonische ziggoerat van meer dan 90 meter hoog, de Etemenanki.

De spijker op de kop

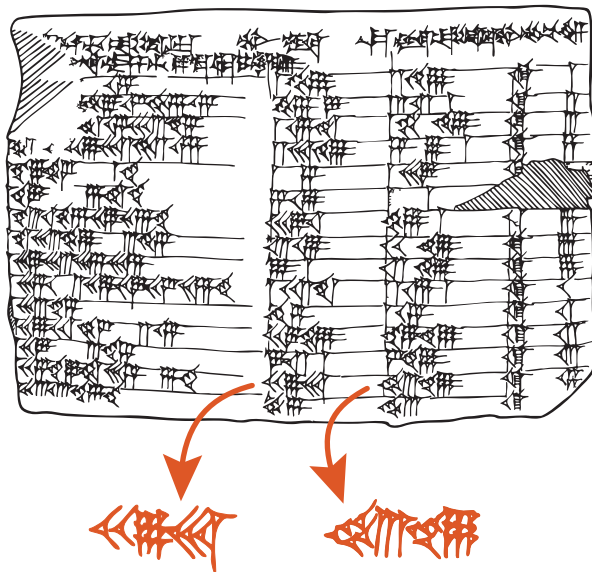
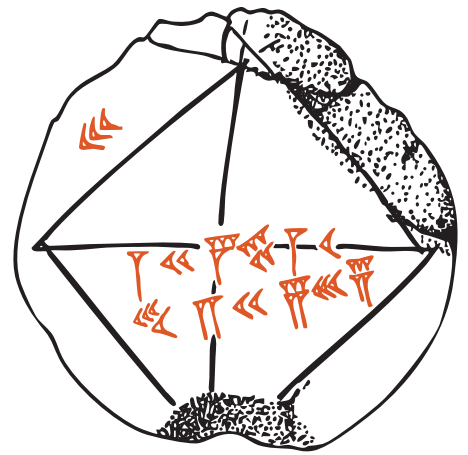
De vroege Babyloniërs kenden geen symbool voor 0. Niet alleen voor het getal op zichzelf, maar ook om bijvoorbeeld de getallen 1 en 60 (allebei genoteerd met een enkele spijker) te kunnen onderscheiden. Bovendien werd een cijfer 0 middenin een getal gewoon opgelost door wat lege ruimte te laten. Om zulke lege ruimtes tussen cijfers te vullen werd er later weliswaar een nieuw symbool ingevoerd (twee diagonale spijkers) maar het verschil tussen 1 en 60 bleef ambigu.

De Babyloniërs konden ook met breuken rekenen, maar daarbij wordt deze schrijfwijze alleen maar dubbelzinniger! Ze gebruikten namelijk evenmin een scheidingsteken zoals onze komma. Diezelfde ene verticale spijker kan met andere woorden ook de breuk $\frac{1}{60}$ voorstellen, voor een 60ste deel, en het voorbeeld 16345 kan ook worden opgevat als $\approx 272,4167$. Algemeen wordt aangenomen dat de context de bedoeling wel duidelijk maakte.

Een sprekende illustratie is kleitablet **YBC 7289**. Die beeldt een vierkante figuur af met enkele getallen bij gegrift:

- op een zijde staat het getal 30,
- op een diagonaal staat een $1^{\circ}24'51''10$,
- met daaronder een $42^{\circ}25'35$.

Met een denkbeeldige komma na het eerste cijfer staan daar de getallen 1,41421296 en 42,42638889 in onze schrijfwijze. Zie je daar de vierkantswortel van 2 staan, zo'n 1,41421356, en dan de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde 30? Inderdaad, meer dan een millennium vóór Pythagoras kenden de Babyloniërs al deze benadering die 99,99996% correct is!



En de oude Babyloniërs waren duidelijk niet alleen op de hoogte van de stelling van Pythagoras binnen een vierkant. Een nog ouder gedateerde kleitablet **Plimpton 322** bevat een indrukwekkende tabel vol referenties naar Pythagorische drietallen: getallen (a, b, c) waarbij geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$ (zoals 3, 4, 5 een beroemd voorbeeld is). Bijna onderaan staan bijvoorbeeld $29^{\circ}31' = 1771$ en $53^{\circ}49' = 3229$, terwijl $1771^2 + 2700^2 = 3229^2$ — precies de termen a en c uit zo'n drietal dus. Hoe deze tabel werd opgesteld, is niet helemaal duidelijk, maar waarschijnlijk werd die gebruikt in de landmeetkunde.

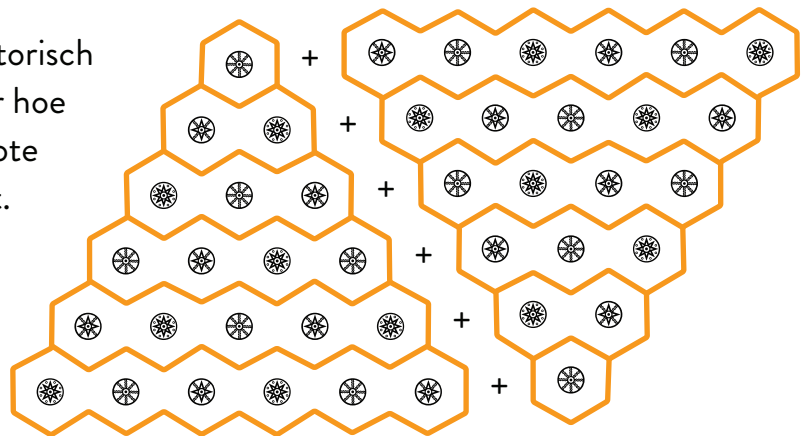
Driehoeksgetallen

De puzzel steunt op de beroemde *driehoeksgetallen*: uitkomsten van sommen $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ tot en met een zekere term. Het totale aantal zeshoekjes in de volledige puzzel van 15 stukken is gelijk aan $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 14 + 15 = 120$. Hoe kunnen we zo'n som efficiënt berekenen?

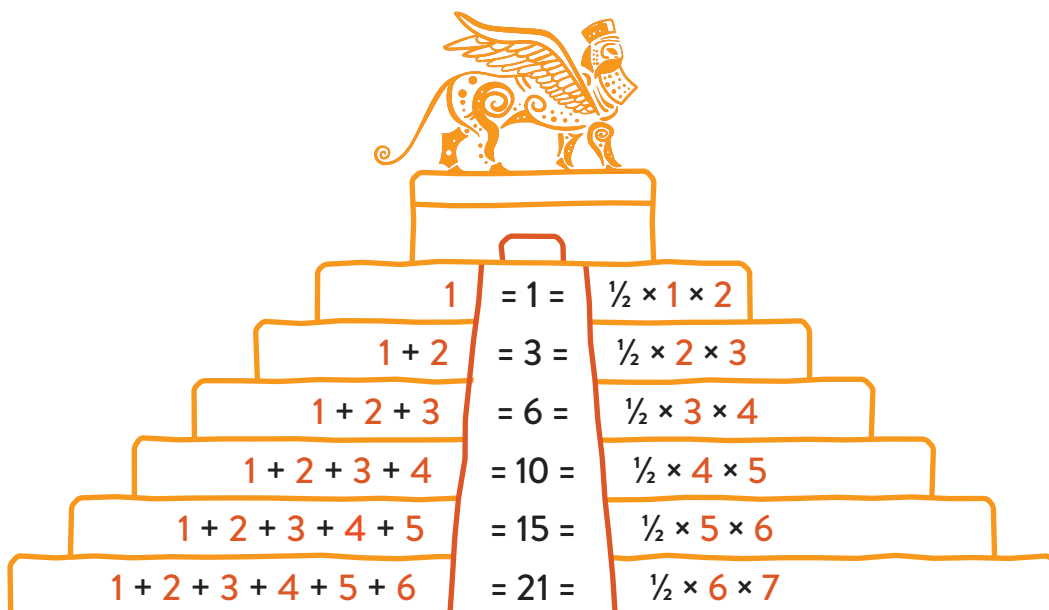
Een beroemde legende vertelt dat Carl Friedrich Gauss, een van de grootste wiskundigen ooit, als zevenjarige jongen werd gevraagd om de getallen 1 tot 100 op te tellen om de leerkracht even rust te gunnen. Zijn klasgenoten begonnen braafjes rekenen, maar Gauss gaf in een mum van tijd het juiste antwoord. Hij had ingezien dat je die 100 getallen netjes kan opdelen in 50 paren met dezelfde som, namelijk $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98$, enzoverder tot $50 + 51$. De totaalsom is dus gewoon 50×101 , oftewel 5050.

In hoeverre het verhaal van Gauss historisch correct is, valt te bediscussiëren, maar hoe dan ook is het een amusante anekdote die een algemene werkwijze schetst. Koppel kleinere getallen aan grotere in paren van dezelfde som, en alles lukt met één vermenigvuldiging:

$$\frac{1}{2} \times N \times (N + 1)$$



Meetkundig kun je driehoeksgetallen voorstellen als, wel ja, driehoeken bestaande uit meerdere lagen. Je vindt de somformule voor een driehoek met N lagen door die met een kopie samen te puzzelen tot een parallellogram, met N even lange rijen van lengte $N + 1$. De som is dus de helft van N keer $N + 1$.



Meer weten?

Geïnteresseerd in de Pythagorische drietallen in de tablet Plimpton 322, en de (vermoedelijke) toepassing ervan als goniometrische tabel?

- Daniel Mansfield, Norman Wildberger, *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry*. *Historia Mathematica*, vol. 44, 2013, p. 395–419.

Marcus du Sautoy presenteerde in een vierdelige documentaire *The Story of Maths* op de BBC een tocht doorheen de geschiedenis van de wiskunde. De eerste aflevering vertelt over de oude Egyptenaren, Mesopotamiërs en Grieken. Een aanrader!

- Marcus du Sautoy, *The Story of Maths*. BBC, 2008.

De anekdote over de jonge Gauss is waarschijnlijk niet helemaal historisch accuraat. Lees zeker onderstaande column eens voor een uitgebreide reconstructie.

- Brian Hayes, *Gauss's Day of Reckoning*. *American Scientist*, vol. 94, no. 3, 2006, p. 200.

Maar Gauss heeft een andere verwezenlijking met driehoeksgetallen zeker wel op zijn palmares: hij bewees dat elk natuurlijk getal geschreven kan worden als de som van drie driehoeksgetallen. In zijn dagboek schreef hij de cryptische lijn **EYPHKA num. = $\Delta + \Delta + \Delta$** . Het resultaat wordt daarom wel eens de Eurekastelling genoemd.

$$**EYPHKA \text{ num.} = \Delta + \Delta + \Delta$$

Vind je het bewijsje zonder woorden voor de driehoeksgetalformule wel schattig, en smaakt die naar meer? Roger Nelsen heeft er een heleboel verzameld in een aantal boeken, met veel illustraties en weinig woorden.

- Roger Nelsen, *Proofs without words: exercises in visual thinking*. Mathematical Association of America, 1993.
- Roger Nelsen, *Proofs without words II: more exercises in visual thinking*. Mathematical Association of America, 2000.
- Roger Nelsen, *Proofs without words III: further exercises in visual thinking*. Mathematical Association of America, 2015.