

Wat als ...

je een cilinder en
een mobiusband
aan elkaar kleeft?

Wat als ...

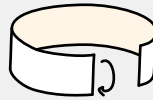
je de geknipte helften
nog eens in twee knipt?

Hoe maak je een möbiusband?

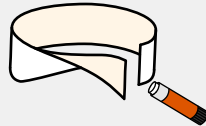
Start met een strook papier.



Buig de strook tot een cilinder.



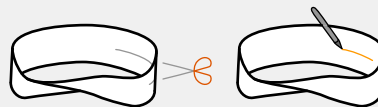
Maak een halve twist in de strook ...



... voor je de cilinder dichtkleeft.



Bewonder je möbiusband!
Of experimenteer en leer door:



de möbiusband doormidden te knippen
en/of erop te tekenen.

Wat als ...

je meerdere
möbiusbanden
aan elkaar kleeft?

Wat als ...

je de uiteinden van het
strookje onder een hoek
samenkleeft?

Wat als ...

je niet in wijzerzin maar
in tegenwijzerzin twist?

Wat als ...

je niet in het midden
maar meer langs de ene
of de andere kant
begint met knippen
of tekenen?

Wat als ...

je zelf nog een leuker idee
hebt om uit te testen?

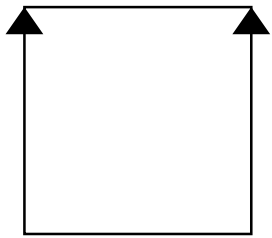
Wat als ...

er twee, drie of nog meer
halve twists waren?

Bollebus

Hoe werkt een möbiusband?

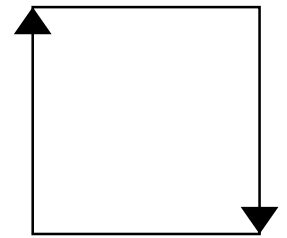
Om het gedrag van deze onschuldige uitziende strook papier beter te begrijpen, wordt vaak een diagram gemaakt van de quotiëntruimte. Zo'n diagram toont in feite hoe je de randen aan elkaar zou moeten plakken om de beschreven vorm te verkrijgen; of toch een topologisch equivalent ervan. Door de pijlen in de juiste richting met elkaar te identificeren, krijg je dezelfde vorm, op continue vervorming na.



cilinder

Links worden de randen in dezelfde richting verbonden, rechts daarentegen worden de punten linksboven met die rechtsonder vereenzelvigd, en de hele rand zo omgekeerd aaneen gekleefd.

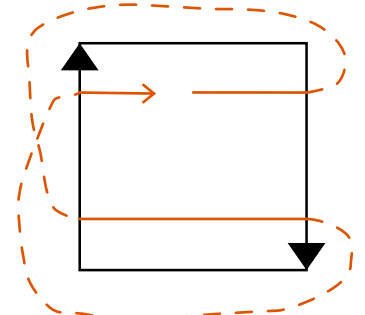
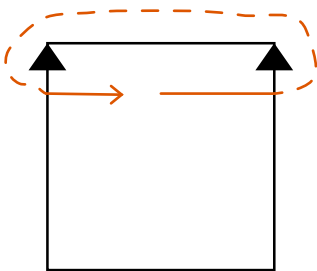
Bij de cilinder links zie je dan ook het gewoonlijke gedrag; een lijn van links naar rechts die bovenaan begint zal bovenaan blijven doorlopen.



möbiusband

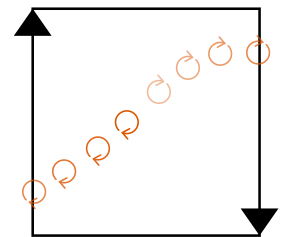
Bij de möbiusband rechts daarentegen, zal deze zelfde lijn tweemaal door ons vierkantje lopen.

Op zo'n diagram kun je dus al aflezen dat de möbiusband geen boven en onderkant heeft zoals de cilinder. Nee, er is maar één rand.



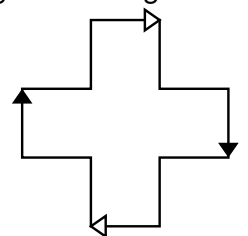
Je kan ook zien dat de möbiusband een niet-oriënteerbaar oppervlak is. Je kan namelijk geen consistente keuze maken voor wijzerzin/tegenwijzerzin, links-rechts of een georiënteerd assenstelsel. Naarmate je zo'n keuze immers zou gaan rondschuiven om ze over het hele oppervlak uit te breiden, zou je immers inconsistenties vinden.

Een andere uitspraak die je vaak hoort over möbiusbanden, is dat ze maar één kant hebben en geen binnen- en buitenkant zoals een cilinder. Dit is geen inherente eigenschap van de möbiusband, maar een gevolg van z'n inbedding in onze 3D-wereld. Voor een 2D wezen dat in de möbiusband of de cilinder leeft, houdt de notie van binnen of buitenkant immers helemaal geen steek.

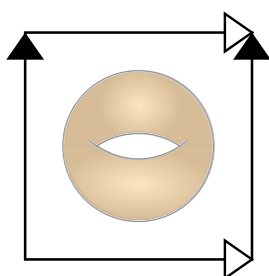


Deze diagrammen maken ook geen onderscheid tussen een cilinder en de situatie waar we twee halve twists toevoegden alvorens de strook dicht te kleven. In beide gevallen wordt de rand immers in de originele richting aangeengeplakt. Toch zien we verschillend gedrag bij het openknippen. Ook dit is een gevolg van de 3D-ruimte waarin we werken, en iets wat deze 2D voorstellingen niet kunnen weergeven. In 4D zouden de in elkaar gehaakte ringen trouwens wel uit elkaar geschoven kunnen worden (zonder ze open te knippen).

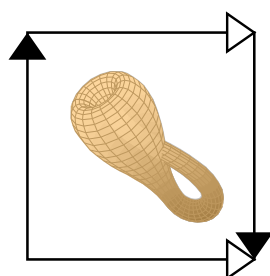
Merk op dat niets ons tegenhoudt om meerdere identificaties door te voeren of vanaf een andere vorm te starten. Zo kan je twee aaneen gekleefde möbiusbanden ook weergeven als volgt:



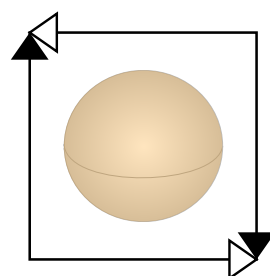
Ook kan je een cilinder nog eens langs de andere randen identificeren om een donut of torus te maken, of een möbiusband op analoge wijze tot een Kleinfles om toveren.



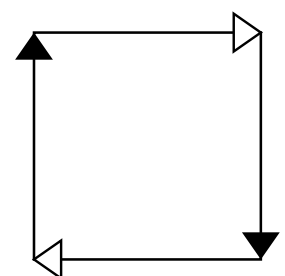
torus



Kleinfles



bol



projectief vlak